Monitoria (lista de Revisão)

Ex 4 (Desigualdade de Bernoulli)

$$(x+1)^n \geq 1 + nx, \quad \forall n \geq 2, \quad \forall x > -1$$

Dem.

Por indução em n. Se $n = 2$,

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x,$$

pois $x^2 > 0$.

Suponha por hip. de indução que

$$(x+1)^n \geq 1 + nx$$

Vamos provar para $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0} \overset{HI}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq$$

$$1 + (n+1)x \qquad \blacksquare$$

→ Ex 6: $a, b, c \in \mathbb{Z}$

(i) Se $a | b \Rightarrow a + c | b + c$.

- Contra-exemplo:

$2 | 4$, mas $2 + 3 = 5 \nmid 7 = 4 + 3$.

(ii) $a|b \Rightarrow ac|bc$, $c \neq 0$

Dem: Se $a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ak \Rightarrow$

$bc = (ac) \cdot k \Rightarrow ac|bc$.

obs Como não há restrição sobre c.

Tomando $c = 0$, (ii) é falsa

(iii) $a|b \Rightarrow (-b)|(-a)$

Contra-exemplo: tome $a = 2$ e $b = 4$,

$2|4$, mas $-4 \nmid -2$ pois caso contrário,

$|-2| \geq |-4| \Leftrightarrow 2 \geq 4$ (contradição)

(iv) Se $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b$ ou $a \mid c$

Contra exemplo: Seja $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$

$a = 2 \mid 8 = b+c$, mas $2 \nmid 3$ e $2 \nmid 5$.

$\boxed{}$

→ Ex 7:

(i) Se $a \mid b \Rightarrow \underbrace{(-a) \mid b}_{(1)}$, $\underbrace{a \mid (-b)}_{(2)}$ e $\underbrace{(-a) \mid (-b)}_{(3)}$.

Dem:

(1) Se $a \mid b \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $b = a \cdot k \Rightarrow$

$b = (-a) \cdot (-k) \Rightarrow (-a) \mid b$.

(2) Se $a \mid b \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z}$ tq $b = ac \Rightarrow$

$(-1)\, b = (-1) \cdot a \cdot c \Rightarrow -b = a(-c) \Rightarrow a \mid (-b)$

(3) Se $a \mid b \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z}$ tq $b = ac \Rightarrow$

$\underbrace{(-1)\, b}_{-b} = (-a)\, c \Rightarrow (-a) \mid (-b)$

$\blacksquare$

(ii) Se $c \neq 0$,

Como $a \mid b \Rightarrow b = a \cdot k \Rightarrow bc = ac \cdot k \Rightarrow$

$ac \mid bc$.

Reciprocamente, se $ac \mid bc \Rightarrow$

$$bc = ac \cdot k \overset{\text{lei}}{\underset{\text{canc.}}{\Rightarrow}} b = a \cdot k \Rightarrow a \mid b.$$

obs: Prop/lei cancelativa (A.7 - pág 15).

$\boxtimes$

→ Ex:

(i) Seja $n \in \mathbb{Z}$ então $n = 4k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ (Alg. da divisão). Note se $r = 0$ ou 2, então n é par. Logo, se n é ímpar então n é da forma $4k+1$ ou $4k+3$

$\boxtimes$

(ii) Queremos provar que o cubo de um inteiro é da forma $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.

Seja $n \in \mathbb{Z}$, pelo alg. da Divisão,

$$n = 9k + r, \quad 0 \leq r < |9| = 9.$$

$$n^3 = (9k+r)^3 = (9k)^3 + 3\cdot(9k)^2\cdot r + 3\cdot 9k\cdot r^2 + r^3 =$$

$$9(\underbrace{9^2k^3 + 3\cdot 9\cdot k^2\cdot r + 3\cdot k\cdot r^2}_{l}) + r^3 = 9l + r^3$$

Basta testar os possíveis valores de r.

Se $r=0$, $9\ell + r^3 = 9\ell$

Se $r=1$, $9\ell + r^3 = 9\ell + 1$

Se $r=2$, $9\ell + r^3 = 9\ell + 8$

Se $r=3$, $9\ell + r^3 = 9\ell + \underbrace{27}_{9 \cdot 3} = 9(\ell + 3)$

$\vdots$

obs Usar congruências: $r \in \{0, 1, \dots, 8\}$

$n \equiv r \pmod 9 \Rightarrow n^3 \equiv 0 \pmod 9$

$n^3 \equiv 1^3 \pmod 9$

$n^3 \equiv 8 \pmod 9$ $(\dots)$

Ex 10) → Seja $n \in \mathbb{Z}$ então $n = 3k + r$ $(r \in \{0, 1, 2\})$

$0 \leq r < |3| = 3$

Queremos que $3 \mid (n-1)n(n+1)$. Se $r = 0$ então

$n = 3k$. Se $r = 1$, $n - 1 = 3k$. Se $r = 2$,

$n + 1 = 3(k+1)$.

De toda forma, ou $(n-1)$ ou n ou $(n+1)$

é múltiplo de 3 e, portanto, $3 \mid (n-1)n(n+1)$.

obs/ $3 \mid \underbrace{a}_{(n-1)}\underbrace{(a+1)}_{n}\underbrace{(a+2)}_{(n+1)}$ ←

$\blacksquare$

(ii) Queremos que $n \mid \underbrace{x(x+1) \cdots}_{n \text{ números consec.}} (x+(n-1))$

Pelo alg. da divisão $x = nk + r$, $r \in \{0, \dots, n-1\}$. Se $r = 0$, então $x = nk$ e portanto n divide o produto.

Se $r \in \{1, \dots, n-1\}$

$n \mid \underbrace{nk + r + (n-r)}_{n(k+1)}$ e note que $n - r = \alpha \in \{1, \dots, (n-1)\}$ e $nk + r = x$. Logo n divide o produto $\blacksquare$

Ex 11 Queremos que $8 \mid (a^2-1)$ se $2 \nmid a$.

Dem:

Se $2 \nmid a \Rightarrow a = 2k+1$ (ímpar)

Note que $a^2-1 = (a+1)(a-1) =$

$2(k+1)(2k) = 4k(k+1)$. Então veja que

k ou $(k+1)$ é par. logo,

$$8 \mid (a^2-1)$$

$\blacksquare$

Ex 12: (i) Sejam a e b ímpares. Então

$a = 2k+1$ e $b = 2\ell+1$. Daí

$$a^2 + b^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (4\ell^2 + 4\ell + 1) =$$

$$4(\underbrace{k^2 + \ell^2 + k +}_{v} \ell) + 2 = 4v + 2 = 2(2v+1)$$

$${}^{2}\cancel{4}k^2 = \cancel{2}(2v+1) \text{ (contradição)}$$

Obs/ $a^2 + b^2 = c^2$

Se c for par então $c^2 = 4k^2$, mas $4 \nmid 2$.

Se c for ímpar, então c^2 é ímpar mas

$2(2v+1)$ é par. Logo $a^2 + b^2 \neq c^2$ $\blacksquare$

(ii) Queremos que $24 \mid a(a^2-1)$

obs/ Ex 16: Prop: Sejam a e b inteiros relativamente primos ($mdc(a,b)=1$) e seja c outro inteiro tq $a \mid c$ e $b \mid c$. Então $ab \mid c$

Dem: Se $a \mid c \Rightarrow c = ak$. Daí, $b \mid ak$. Como $mdc(a,b)=1$, pelo teo. de Euclides, $b \mid k \Rightarrow$
$k = b \cdot q$. Logo, $c = (a \cdot b) q \Rightarrow ab \mid c$. ∎

ii) Note que $24 = 3 \cdot 8$ em $mdc(3, 8) = 1$.

Vamos mostrar que $3 \mid a(a^2-1)$ e

$8 \mid a \cdot (a^2-1)$.

→ $3 \mid a(a^2-1) = \underbrace{a(a-1)(a+1)}_{3 \text{ consec}}$ (ex 10(i))

→ Já sabemos que $8 \mid a^2-1$ (ex 11), então

$8 \mid a(a^2-1)$. logo pelo ex 16 (obs),

$24 \mid a \cdot (a^2-1)$

$\boxtimes$

→ lista 5:

Ex 2 (item i) $4x + 51y = 9$ (usando congruência)

Dem:

Repare que $ax \equiv b \pmod{m} \iff m \mid ax - b \iff$

$ax - b = my \iff ax - my = b$

Note que $4x + 51y = 9 \iff 4x - 51(-y) = 9 \iff$

$4x \equiv 9 \pmod{51} \overset{\text{prop. } 3.2.4}{\iff} 52x \equiv 9 \cdot 13 \pmod{51} \iff$

$\text{mdc}(13, 51) = 1$

$x \equiv 9 \cdot 13 \pmod{51} \iff x = 9 \cdot 13 + 51t$

Obtenemos que $x = 9 \cdot 13 + 51t, \quad t \in \mathbb{Z}.$

$$4(9 \cdot 13 + 51t) - 9 = -51y \Rightarrow$$

$$(4 \cdot 9 \cdot 13 - 9) + 4 \cdot 51t = -51y \Rightarrow$$

$$-y = \frac{(4 \cdot 9 \cdot 13 - 9)}{51} + 4t \quad (\ldots)$$

Ex 3)

$$3x - 7y \equiv 11 \pmod{13} \iff$$

$\mathrm{mdc}(13,4) = 1$

$$3x \equiv 11 + 7y \pmod{13} \iff$$

$$12x \equiv 44 + 28y \pmod{13} \iff$$

$$-1x \equiv 44 + 28y \pmod{13} \iff$$

$$x \equiv -28y - 44 \pmod{13}.$$ Assim,

$x = \underbrace{-28y - 44} + 13t$. Note que $x = -28y - 44$ é única sol. módulo 13.

Agora, tomando $y \in \mathbb{Z}$, $(-28y - 44, y)$ satisfaz a eq. de cong. $3x - 7y \equiv 11 \pmod{13}$ (*)

No entanto se tomarmos $y \in \{0, \dots, 12\}$,

teremos todos os sol. não congruentes módulo 13.

$$(-28y - 44, y), \quad y \in \{0, \dots, 12\}. \qquad \blacksquare$$

obs: Originalmente, encontramos

$x = -28y - 44 + 13t$. As soluções da eq (*) são

(x, y), $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$

$3(-28y - 44 + 13t) - 7y$ (...)