

# A FÍSICA DO MAGNETISMO

## 1. CAMPOS MAGNÉTICOS

### 1.1. Campo de uma força

Na física, o campo de uma força é freqüentemente mais importante que a magnitude absoluta da força. Pode-se definir campo de uma força como sendo a força que age em uma unidade de material. Por exemplo, o campo elétrico produzido por um corpo de carga  $q_0$  em determinada posição é a força que age em uma carga unitária naquele local.

O campo elétrico em um ponto do espaço, a uma distância  $r$  da carga  $q_0$ , é dado por:

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \quad (1.1)$$

$\epsilon_0$  é a constante de permissividade ( $8,85 \times 10^{-12}$  farad/m).

Assim, a força que atua em uma segunda carga  $q$  é dada por:

$$F = E \cdot q \quad (1.2)$$

Do mesmo modo, o campo gravitacional nas vizinhanças de uma massa  $M$  é a força que ela exerce em uma unidade de massa. Pela segunda lei de Newton, a força de atração gravitacional ( $F$ ) que atua em um segundo corpo de massa  $m$ , é representada pelo produto da massa  $m$  pela aceleração gravitacional ( $a_g$ ) imposta ao corpo:

$$F = m \cdot a_g \quad (1.3)$$

Se a massa  $m$  for unitária, então, podemos deduzir que a própria aceleração gravitacional corresponde ao campo gravitacional. Por outro lado, a lei de gravitação de Newton diz que a força de atração gravitacional ( $F$ ) entre dois corpos de massas  $m$  e  $M$  é

proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles:

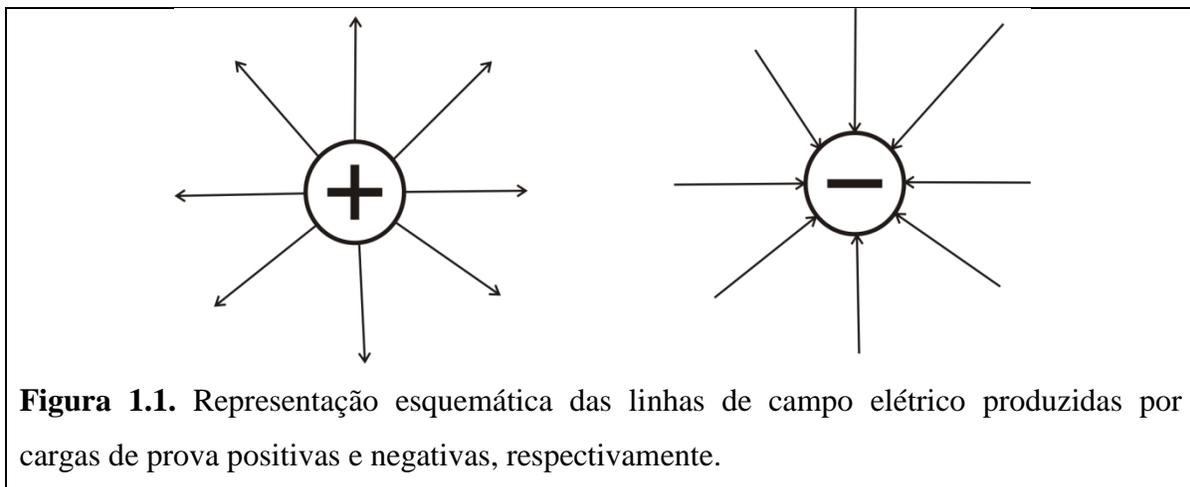
$$\mathbf{F} = - \frac{G m M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.4)$$

onde  $G$  é a constante de proporcionalidade, denominada de Constante Gravitacional Universal e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário na direção da reta que une os centros de massa dos dois corpos.

Igualando as expressões (1.3) e (1.4), teremos para a aceleração gravitacional a expressão:

$$\mathbf{a}_g = - \left( \frac{G M}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (1.5)$$

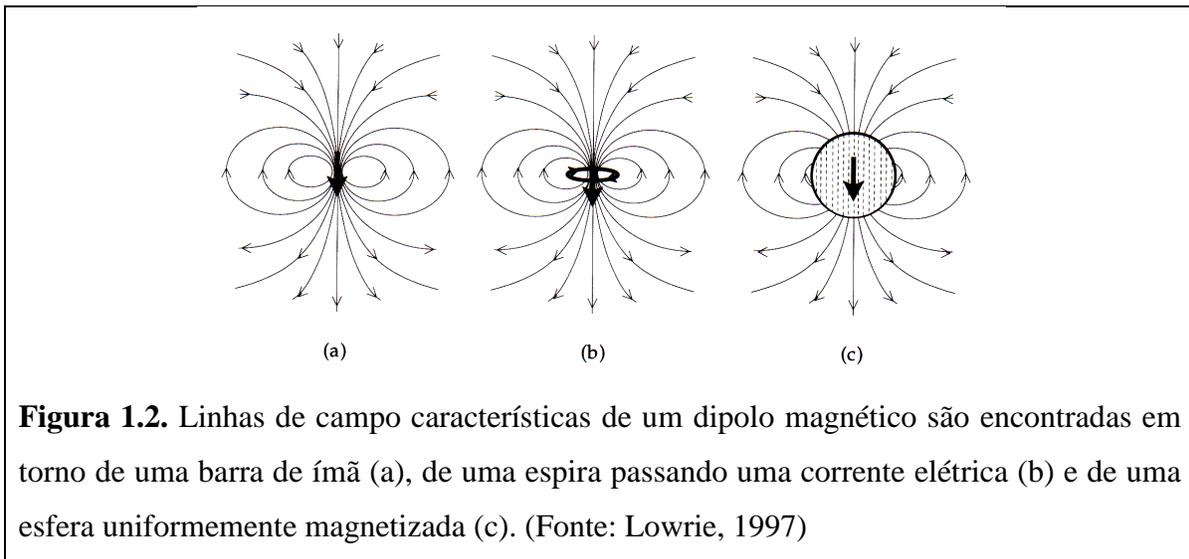
O campo de uma força é representado por linhas de campo. Em qualquer lugar do espaço, a força é tangencial à linha de campo e a intensidade da força é representada pelo número de linhas de campo por unidade de área da seção transversal. O campo gravitacional e o campo elétrico são radiais. A **Figura 1.1** mostra a representação do campo elétrico para cargas positivas e negativas.



Já o campo magnético é mais complexo. Gauss mostrou que não existem pólos magnéticos livres, i.e., não existem monopolos. Haverá sempre um pólo magnético positivo formando par com um pólo magnético negativo. O mais importante campo magnético é o

de um dipolo magnético, o qual representa a componente dominante do campo geomagnético. O dipolo magnético mais simples é formado por duas cargas magnéticas de sinais opostos infinitamente próximas uma da outra.

A **Figura 1.2** mostra três sistemas físicos que apresentam campo dipolar; uma barra de ímã, uma espira de corrente e uma esfera uniformemente magnetizada. Todos estes sistemas apresentam representações de campos magnéticos similares, como pode ser visto na figura.



**Figura 1.2.** Linhas de campo características de um dipolo magnético são encontradas em torno de uma barra de ímã (a), de uma espira passando uma corrente elétrica (b) e de uma esfera uniformemente magnetizada (c). (Fonte: Lowrie, 1997)

Os experimentos de Coulomb, em 1875, estabeleceram que a força exercida entre pólos magnéticos de ímãs é proporcional ao inverso do quadrado da distância da separação entre eles. Gauss expandiu as observações de Coulomb e atribuiu as forças de atração e repulsão a cargas ou pólos magnéticos fictícios. A lei que governa a força ( $F$ ) entre dois pólos magnéticos  $p_1$  e  $p_2$ , situados a uma distância  $r$  entre si, pode ser formulada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{K p_1 p_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.6)$$

onde  $K$  é uma constante de proporcionalidade e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário paralelo a reta que une os dois pólos.

Embora pólos magnéticos livres não existam, muitas propriedades magnéticas podem ser resolvidas em termos de pólos magnéticos fictícios. De forma similar à definição

de campo elétrico e campo gravitacional, podemos definir o campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  exercido por um pólo magnético de intensidade  $p$ , em um pólo magnético unitário situado a uma distância  $r$ , como sendo igual a:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{Kp}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.7)$$

$\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário paralelo a reta que une os dois pólos, saindo do pólo  $p$ . Se colocarmos o valor de  $K = 1$  (adimensional), a unidade de campo magnético terá dimensões de  $\text{dyna}^{1/2}/\text{cm}^{-1}$ , no c.g.s. e é chamada de Gauss. No sistema internacional (SI) de unidades,  $K$  não é adimensional, sendo definido por:

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (1.8)$$

onde  $\mu_0$  é a constante de permeabilidade ( $4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ ).

## 1.2. Potencial de um pólo magnético

O potencial gravitacional é definido como sendo a energia potencial de uma unidade de massa em um campo gravitacional. Calcula-se o potencial gravitacional a uma distância  $r$  do centro de gravidade do corpo que produz um campo gravitacional, determinando-se o trabalho gasto para levar a massa unitária do ponto  $r$  até o infinito.

Vimos que a força de atração gravitacional ( $\mathbf{F}$ ) exercida em uma unidade de massa é igual à aceleração gravitacional:

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_g = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.9)$$

Assim, o trabalho ( $dU$ ) realizado contrário à força  $F$ , para deslocar a massa unitária da distância  $dr$  é dada por:

$$dU = -F dr \quad (1.10)$$

de (1.9) e (1.10), podemos escrever que:

$$dU = \frac{GM}{r^2} dr \quad (1.11)$$

$$\int_r^\infty dU = \int_r^\infty \frac{GM}{r^2} dr \rightarrow U = -\frac{GM}{r} \quad (1.12)$$

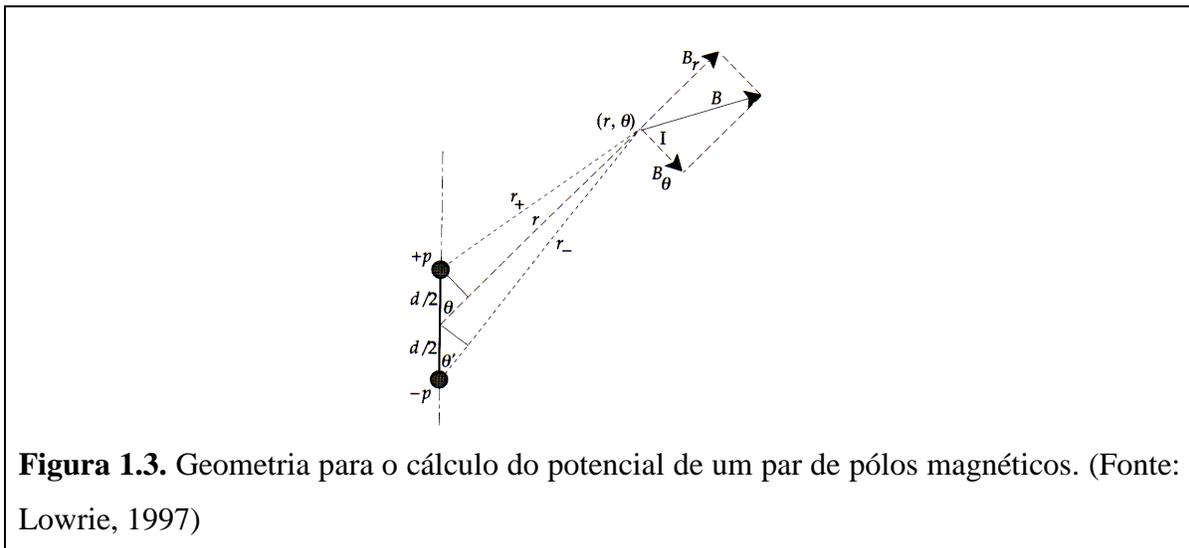
U corresponde ao trabalho para levar a massa unitária da distância r até o infinito e corresponde ao potencial gravitacional nesse ponto.

Podemos definir o potencial magnético W a uma distância r de um pólo magnético de intensidade p, da mesma maneira:

$$W = - \int_r^\infty B dr = - \int_r^\infty \frac{\mu_0 p}{4\pi r^2} dr \rightarrow W = \frac{\mu_0 p}{4\pi r} \quad (1.13)$$

### 1.3. Potencial de um dipolo magnético

A **Figura 1.3** mostra dois pólos magnéticos, um positivo ( $p^+$ ) e outro negativo ( $p^-$ ), separados por uma distância d infinitamente pequena. A linha pontilhada define o eixo do dipolo, em torno do qual, o campo magnético tem simetria rotacional.



O potencial magnético  $W$  a uma distância  $r$ , em relação ao ponto médio do par de pólos, é a soma dos potenciais dos pólos  $p^+$  e  $p^-$ , em relação às distâncias  $r_+$  e  $r_-$ .

$$W = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (1.14)$$

$$W = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left( \frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-} \right) \quad (1.15)$$

Como  $d \ll r$ , podemos fazer algumas aproximações:

$$r_+ \cong r - \frac{d}{2} \cos(\theta) \quad (1.16)$$

$$r_- \cong r + \frac{d}{2} \cos(\theta') \quad (1.17)$$

Podemos escrever também que  $\theta \approx \theta'$ . Assim:

$$r_- - r_+ \cong \frac{d}{2} (\cos \theta' + \cos \theta) \cong d \cos \theta \quad (1.18)$$

$$r_+ \cdot r_- \cong \left( r - \frac{d}{2} \cos \theta \right) \left( r + \frac{d}{2} \cos \theta' \right)$$

$$r_+ \cdot r_- \cong r^2 + \frac{r d}{2} \cos \theta' - \frac{r d}{2} \cos \theta - \frac{d^2}{4} \cos \theta \cos \theta'$$

$$r_+ \cdot r_- \cong r^2 - \frac{d^2}{4} (\cos \theta)^2 \cong r^2 \quad (1.19)$$

Substituindo (1.18) e (1.19) em (1.15), teremos:

$$W = \frac{\mu_0 p d \cos \theta}{4\pi r^2} \quad \text{ou}$$

$$W = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (1.20)$$

onde,  $m = d \cdot p$  é definido como sendo o **momento magnético do dipolo**. Note que o potencial magnético, diferentemente do potencial gravitacional, é inversamente proporcional ao quadrado da distância  $r$  e tem uma variação dependente do ângulo  $\theta$ , como mostrado na **Figura 1.3**.

#### 1.4. Campo de um dipolo magnético

O campo magnético do dipolo pode ser determinado pela derivada em  $r$  e em  $\theta$  do potencial magnético, definindo a componente radial ( $B_r$ ) e a componente tangencial ( $B_\theta$ ) do campo dipolar:

$$B_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{\partial \left( \frac{\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^2} \right)}{\partial r} = \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^3} \quad (1.21)$$

$$B_\theta = -\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\right) \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \quad (1.22)$$

Note que nos pólos ( $\theta = 0$ ), temos somente a componente radial ( $B_\theta = 0$ ):

$$B_r = \frac{2\mu_0 m}{4\pi r^3} \quad (1.23)$$

No equador ( $\theta = \pi/2$ ), temos somente a componente tangencial ( $B_r = 0$ )

$$B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \quad (1.24)$$

Note também que o campo magnético nos pólos é duas vezes maior do que o campo magnético no equador.

Em qualquer lugar do espaço próximo ao dipolo, a componente total  $\mathbf{B}$  do campo (**Figura 1.3**) forma um ângulo  $I$  (inclinação magnética) com a horizontal local (direção de  $B_\theta$ ). Da **Figura 1.3**, podemos escrever que:

$$\tan I = \frac{B_r}{B_\theta} = \left( \frac{\frac{2 \mu_0 m}{4\pi r^3}}{\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

↓

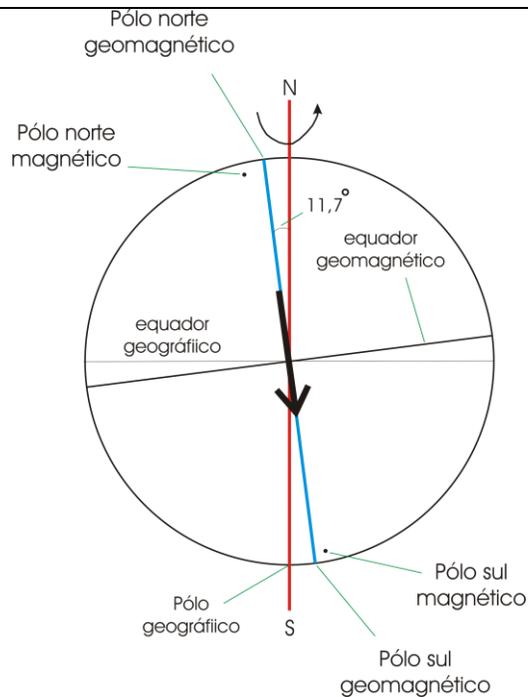
$$\tan I = 2 \cot \theta = 2 \tan \lambda \quad (1.25)$$

onde,  $\lambda = (90 - \theta)$ .

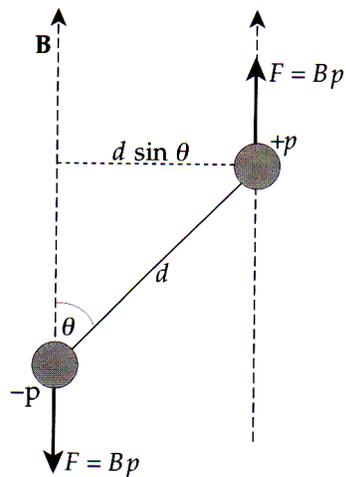
Em 1600, Gilbert verificou que o campo geomagnético é predominantemente dipolar, representado por um dipolo centrado na Terra. Entretanto, verificou-se que o dipolo que melhor se ajusta ao campo da Terra não é axial. Ele depende do modelo de campo utilizado, do método de medidas e da época considerada. Os pontos em que o eixo do dipolo intercepta a superfície da Terra são chamados de pólos (norte e sul) geomagnéticos (**Figura 1.4**). Para 1995, estes pólos estavam localizados em 79,3°N; 288,6°E e 79,3°S; 108,6°E. Embora a maior parte do campo da Terra possa ser representada por um campo dipolar, uma parte dele é representada por campos não dipolares. Os pontos da superfície da Terra em que a inclinação magnética é  $\pm 90^\circ$  (i.e., onde o campo é vertical, com sinal positivo ou negativo) são denominados de pólos magnéticos (**Figura 1.4**). Para o ano de 1980, as posições dos pólos magnéticos norte e sul estavam localizadas, respectivamente, em 77,3°N; 258,2°E e 65,6°S; 139,4°E. Note que estes pólos não são exatamente opostos. Isto se deve ao fato de o campo não poder ser representado somente pelo campo de um dipolo.

O torque exercido por um campo magnético em um ímã (a agulha de uma bússola, por exemplo) é proporcional ao momento magnético associado ao ímã. O torque pode ser calculado através das forças exercidas por um campo uniforme  $\mathbf{B}$  em um par de pólos magnéticos de intensidade  $p$ , separados por uma distância  $d$  (**Figura 1.5**). A força que age em cada pólo é dada por:

$$F = B p \quad (1.26)$$



**Figura 1.4.** O dipolo que melhor se ajusta ao campo da Terra está inclinado de  $11,7^\circ$  em relação ao eixo de rotação da terra. Os pólos norte e sul magnéticos são os pontos onde a agulha da bússola se inclina de  $90^\circ$ .



$$\text{torque} = Fd \sin \theta$$

$$\boldsymbol{\tau} = p d B \sin \theta = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

**Figura 1.5.** Definição do momento magnético  $\mathbf{m}$  de um par de pólos magnéticos. (Fonte Lowrie, 1996)

As direções das forças que atuam em cada pólo são opostas, definidas pelo sinal do pólo magnético. O torque atua no sentido de alinhar o eixo do ímã na direção do campo magnético  $\mathbf{B}$ . Se o eixo do ímã faz um ângulo  $\theta$  com a direção do campo, a distância perpendicular às linhas de ação das forças em cada pólo é igual a  $d \cdot \sin \theta$ . Assim, o torque ( $\tau$ ) sentido pelo ímã é dado por:

$$\tau = B p d \sin \theta \quad (1.27)$$

Como  $m = p \cdot d$ , podemos escrever:

$$\tau = m B \sin \theta \text{ ou}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (1.28)$$

### 1.5. Campo magnético originado por uma corrente elétrica

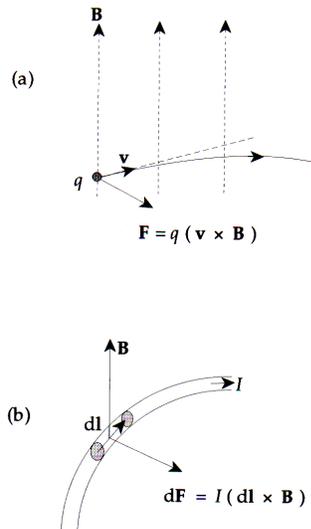
Uma carga elétrica  $q$  movendo-se a uma velocidade  $\mathbf{v}$  em um campo magnético  $\mathbf{B}$  (**Figura 1.6a**) sofre uma força  $\mathbf{F}$ , definida pela equação formulada por Lorentz, em 1879:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.29)$$

A unidade de  $B$  é o Tesla, que equivale a N/Am, de acordo com a equação (1.29).

Considere, agora, cargas elétricas se movimentando em um elemento  $dl$  de um fio condutor de área transversal  $A$  (**Figura 1.6b**). A corrente ( $I$ ) será igual a quantidade de carga que atravessa a área da seção transversal do condutor na unidade de tempo:

$$I = \frac{\Delta Q}{t} \quad (1.30)$$



**Figura 1.6.** Ilustração da (a) lei de Lorentz para a força de deflexão  $\mathbf{F}$  experimentada por uma carga elétrica que se move com velocidade  $\mathbf{v}$  através de um campo magnético  $\mathbf{B}$ , e (b) a lei de Biot Svart para a força experimentada por um elemento  $d\mathbf{l}$  de um fio condutor passando uma corrente  $I$  sob a ação de um campo magnético  $\mathbf{B}$ . (Fonte: Lowrie, 1997)

Agora, considere  $N$  como sendo o número de cargas por unidade de volume. Então, o número de cargas no elemento  $d\mathbf{l}$  é igual a  $N \cdot A \cdot d\mathbf{l}$  e a carga total ( $\Delta Q$ ) será:

$$\Delta Q = N A d\mathbf{l} q \quad (1.31)$$

Se cada carga tem velocidade  $v$ , então para atravessar o espaço  $d\mathbf{l}$ , ela levará um tempo  $t$  definido por:

$$t = \frac{d\mathbf{l}}{v} \quad (1.32)$$

De (1.30), (1.31) e (1.32), tiramos que:

$$I = N A q v \quad (1.33)$$

Agora, cada carga sofrerá uma força dada pela equação (1.29) e a força total transmitida para o elemento  $dl$  será:

$$d\mathbf{F} = N A dl q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = N A v q (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (1.34)$$

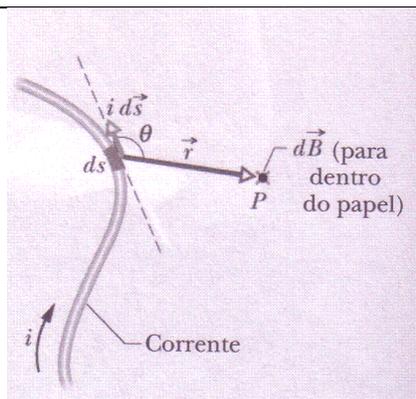
Mas de acordo com a equação (1.33),  $N A v q = I$ . Logo,

$$d\mathbf{F} = I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (1.35)$$

A equação (1.35) representa a Lei de Biot-Savart, que determina a força experimentada pelo elemento  $dl$  do condutor, passando uma corrente  $I$ , em um campo magnético  $\mathbf{B}$  (**Figura 1.6b**). O campo magnético  $\mathbf{B}$  pode ser originado por outro fio condutor (**Figura 1.7**). Por analogia com o campo elétrico, foi proposto que:

$$d\mathbf{B} = \frac{K (i d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r)}{r^2} \quad (1.36)$$

onde  $\mathbf{u}_r$  é o vetor unitário na direção de  $r$  (**Figura 1.7**) e  $K = \mu_0/4\pi$ . Note que a direção de  $d\mathbf{B}$  é definida pela regra da mão direita. No caso da **Figura 1.7**, o campo tem direção perpendicular ao plano da figura, com sentido para dentro.



**Figura 1.7.** Um elemento de corrente  $i ds$  produz um elemento de campo  $d\mathbf{B}$  no ponto  $P$ . O símbolo  $\times$  no ponto  $P$  indica que o sentido do campo  $d\mathbf{B}$  é para dentro no plano da figura.

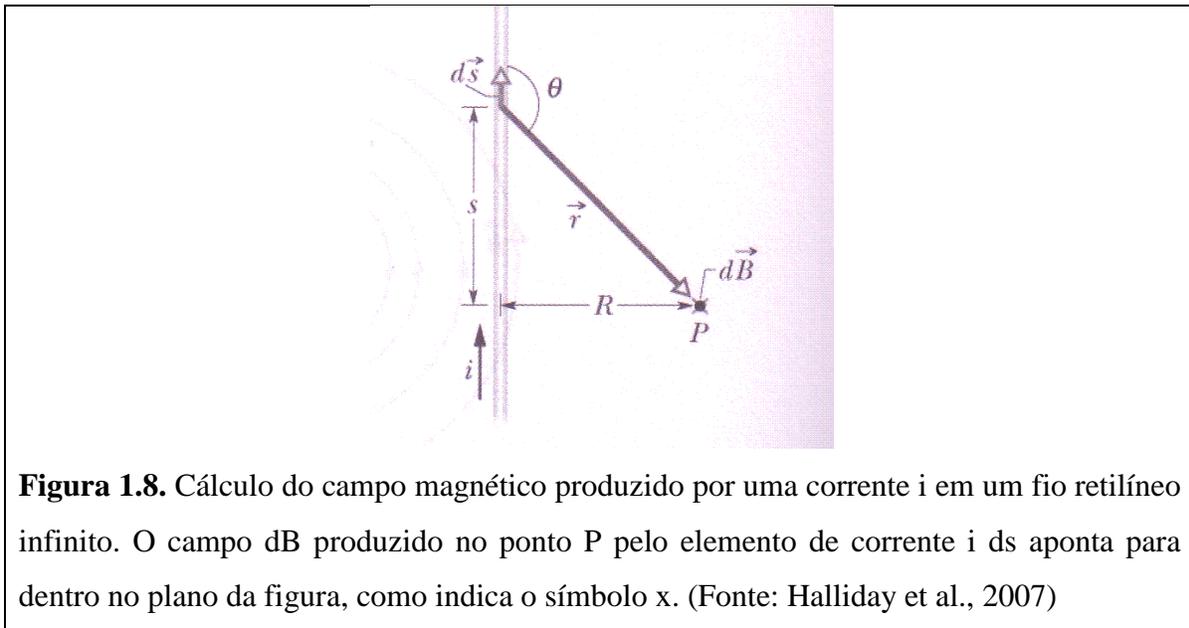
(Fonte: Halliday et al., 2007)

O módulo de dB será dado por:

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{i ds \sin \theta}{r^2} \quad (1.37)$$

Para encontrarmos o campo  $\mathbf{B}$  por toda a distribuição de corrente, devemos integrar sobre todos os elementos de corrente ( $i ds$ ):

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \int \frac{i d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} \quad (1.38)$$



Para o caso de um condutor retilíneo infinito, podemos usar a equação (1.38) para determinar o campo a uma distância  $R$  do fio (**Figura 1.8**):

$$B = \int dB = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \theta}{r^2}\right) ds \quad (1.39)$$

$s$ ,  $\theta$  e  $r$  não são independentes:

$$r = (s^2 + R^2)^{1/2} \quad (1.40)$$

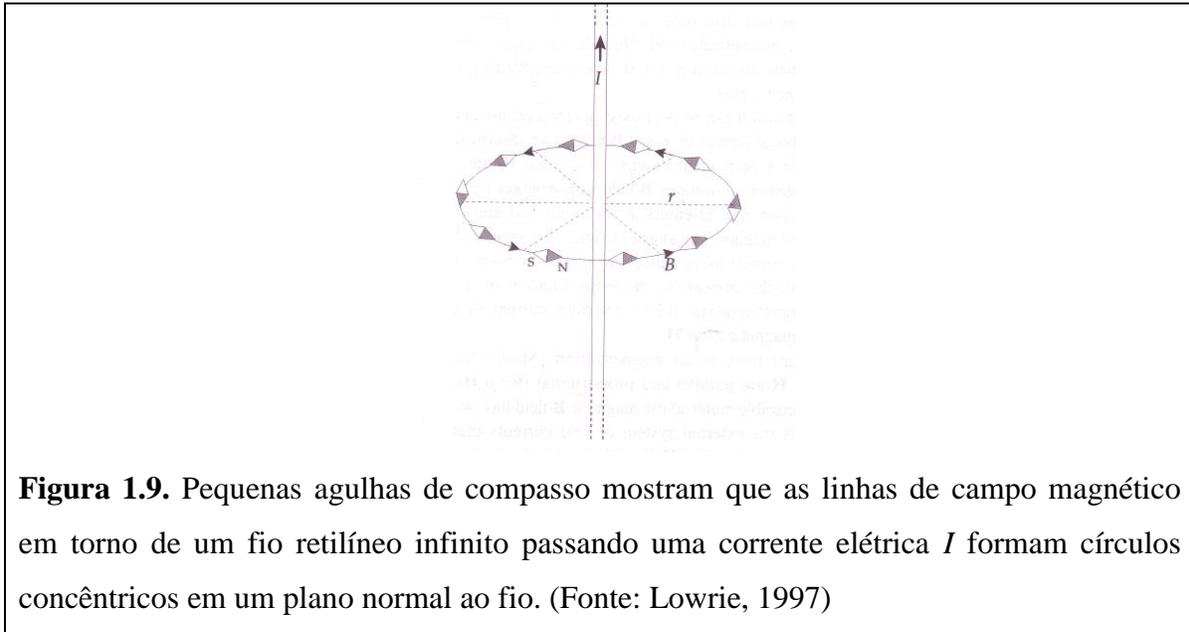
$$\sin \theta = \sin (\pi - \theta) = R / (s^2 + R^2)^{1/2} \quad (1.41)$$

Assim, de (1.39), (1.40) e (1.41), podemos escrever que:

$$B = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{R}{(s^2 + R^2)^{3/2}} \right] ds = \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \right) \left[ \frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \quad (1.42)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (1.43)$$

Note que as linhas de campo em torno do fio condutor retilíneo infinito formam círculos concêntricos no plano normal ao fio (**Figura 1.9**).



## 1.6. Momento magnético de uma espira

A lei de Biot-Savart pode ser aplicada para determinar o torque exercido em uma espira retangular PQRS (**Figura 1.10**), sob a influência de um campo magnético  $\mathbf{B}$ . Os

comprimentos dos lados da espira são  $a$  e  $b$  e definimos o eixo  $x$  na direção paralela ao lado  $\underline{a}$  da espira. A área da espira é  $A = ab$ . A normal ao plano da espira é representada pelo vetor unitário  $\mathbf{n}$  na Figura.

Suponha que uma corrente  $I$  passa pela espira e que o campo magnético  $\mathbf{B}$  é normal ao eixo  $x$ , fazendo um ângulo  $\theta$  com a normal ao plano da espira. Aplicando a equação (1.35), a força  $F_x$  é igual a  $(IbB \cos \theta)$  e age no lado PQ, na direção positiva de  $x$ . Seu efeito é cancelado pela força  $F_x$  que age no lado RS, a qual tem mesma intensidade e direção oposta ( $-x$ ). Forças iguais a  $(IaB)$  agem em direções opostas nos lados QR e SP (**Figura 1.10a**). A distância perpendicular entre as linhas de ação da força  $\mathbf{F}$  em cada segmento  $a$  da espira é  $(d \sin \theta)$  (**Figura 1.10b**), de modo que, o torque  $\tau$  que a espira experimenta é dado por:

$$\tau = (Iab) B \sin \theta \quad (1.44)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (1.45)$$

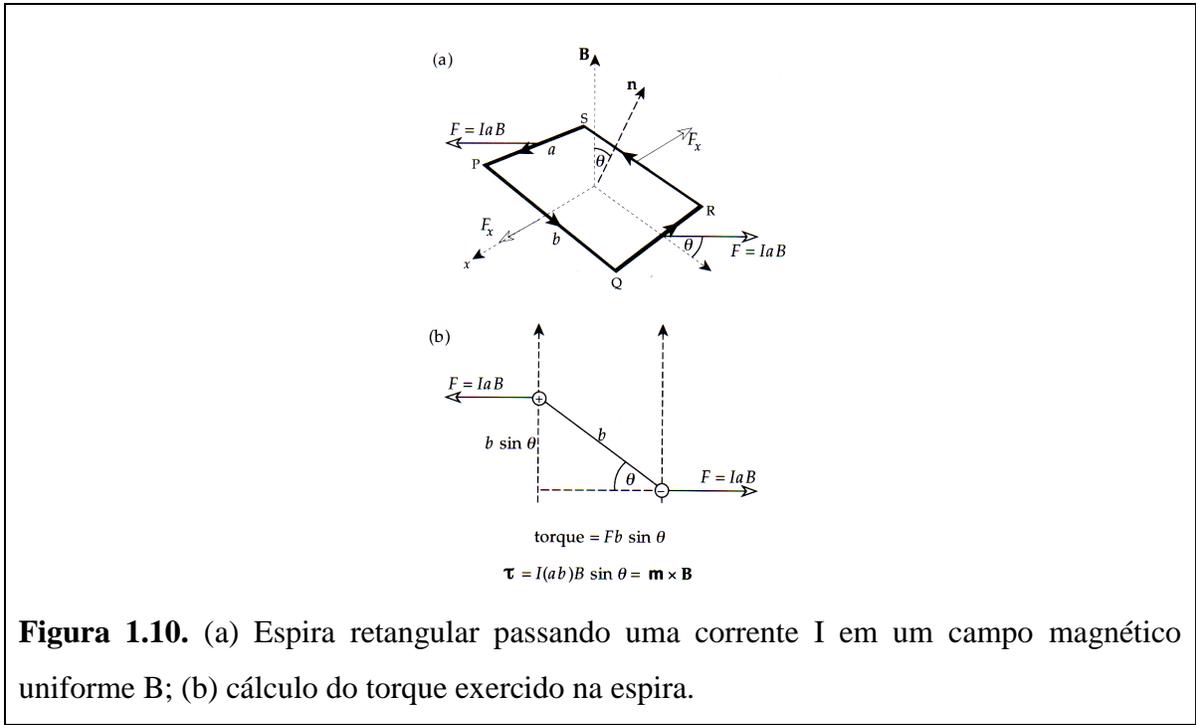
$\mathbf{m} = IA$  é definido como sendo o momento magnético da espira e é representado por um vetor com direção paralela à normal ( $\mathbf{n}$ ) ao plano da espira de corrente. O momento magnético é definido como sendo a corrente ( $I$ ) multiplicada pela área ( $A$ ) para todo tipo de espira, qualquer que seja a sua forma.

Quando comparamos a equação (1.45) com a equação (1.28), que define o torque em um dipolo, fica evidente que  $\mathbf{m}$  corresponde ao momento magnético da espira. A definição de  $\mathbf{m}$  em termos de uma espira de corrente mostra que momento magnético tem unidade de corrente multiplicado por área,  $A/m^2$ .

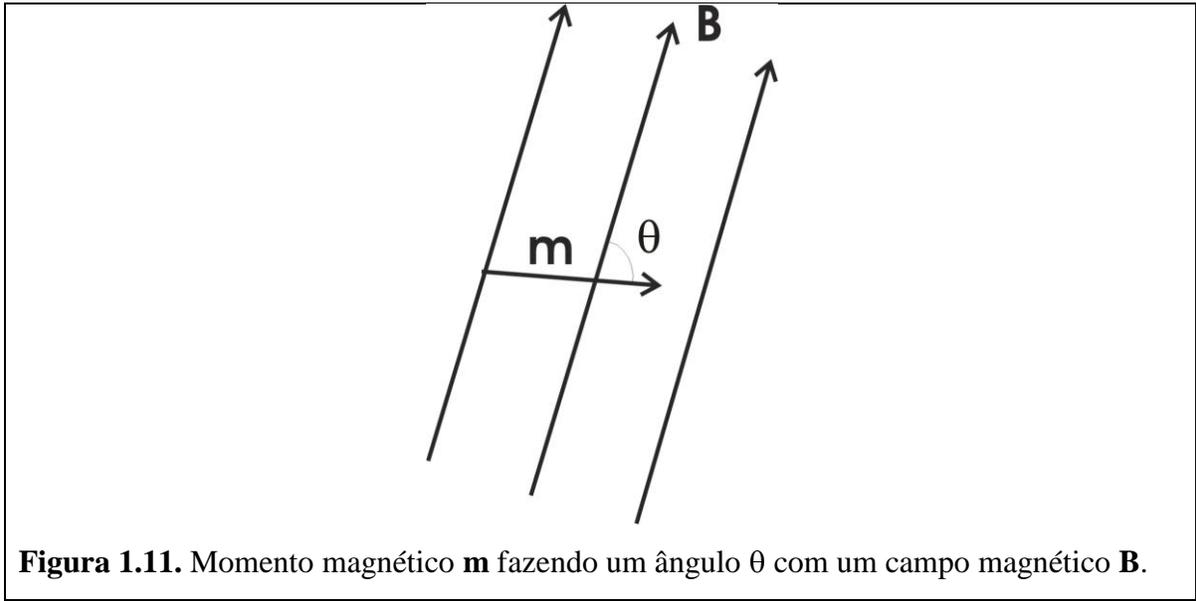
A energia potencial magnética ( $E_m$ ) de um momento magnético ( $\mathbf{m}$ ), em um campo magnético  $\mathbf{B}$  (**Figura 1.11**), é definida pela expressão:

$$E_m = -m B \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (1.46),$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o momento magnético  $\mathbf{m}$  e o campo  $\mathbf{B}$ .



**Figura 1.10.** (a) Espira retangular passando uma corrente  $I$  em um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ ; (b) cálculo do torque exercido na espira.



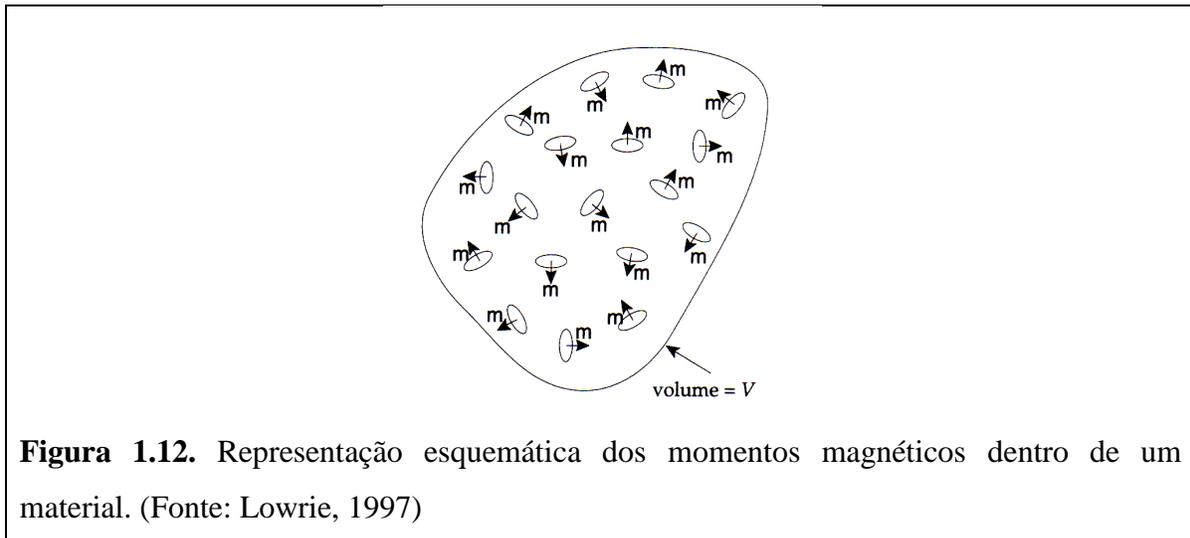
**Figura 1.11.** Momento magnético  $\mathbf{m}$  fazendo um ângulo  $\theta$  com um campo magnético  $\mathbf{B}$ .

A equação (1.46) mostra que a energia potencial magética é mínima quando o momento magnético  $\mathbf{m}$  é paralelo a  $\mathbf{B}$  ( $\theta = 0^\circ$ ) e máxima, quando o momento magnético  $\mathbf{m}$  é antiparalelo a  $\mathbf{B}$  ( $\theta = 180^\circ$ ).

Um grande número de sistemas físicos tem momento de dipolo magnético: a Terra, os ímãs, as espiras de corrente, os átomos, os núcleos, os elétrons e as partículas elementares.

### 1.7. Definição de magnetização

A magnetização de um material está associada aos momentos magnéticos de spin (intrínsecos) dos elétrons. Em uma visão simplificada, o momento magnético total ( $\mathbf{m}_t$ ) de um material é a soma vetorial de todos os momentos magnéticos associados ao volume do material (**Figura 1.12**).



**Figura 1.12.** Representação esquemática dos momentos magnéticos dentro de um material. (Fonte: Lowrie, 1997)

$$\mathbf{m}_t = \sum \mathbf{m}_i \quad (1.47)$$

A magnetização ( $\mathbf{M}$ ) é definida como sendo o momento magnético por unidade de volume:

$$\mathbf{M} = \sum \frac{\mathbf{m}_i}{V} \quad (1.48)$$

Através da equação (1.48) podemos verificar que a unidade de magnetização é A/m.

É interessante notar que a unidade do campo magnético ( $\mathbf{B}$  – indução magnética) é  $\text{N}/\text{Am}$  e da constante de permeabilidade  $\mu_0 = \text{N}/\text{A}^2$  ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}/\text{A}^2$ ). Assim:

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\text{N}/\text{Am}}{\text{N}/\text{A}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (1.49)$$

Assim, vemos que magnetização e  $\mathbf{B}/\mu_0$  têm a mesma unidade. Entretanto, dentro de um material, a magnetização  $\mathbf{M}$  não é igual a  $\mathbf{B}/\mu_0$ ; a diferença é representada pelo campo magnético  $\mathbf{H}$ , o qual apresenta a mesma unidade de magnetização ( $\text{A}/\text{m}$ ):

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.50)$$

$$\text{Para } \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.51)$$

Originalmente,  $\mathbf{H}$  foi definido como campo magnetizante e  $\mathbf{B}$  é o campo de indução magnética. Podemos entender melhor a diferença entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$ , se olharmos para a magnetização  $\mathbf{M}$  induzida em um material magnético através de um campo magnético originado por um solenóide passando uma corrente  $I$ , dentro do qual o material está inserido. Em qualquer ponto do espaço, o campo magnético será a soma do campo aplicado ( $\mathbf{B}_0$ , originado pelo solenóide) e o campo originado pelo material magnetizado ( $\mathbf{B}_M$ ):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M \quad (1.52)$$

Pode-se mostrar que  $\mathbf{B}_M = \mu_0 \cdot \mathbf{M}$  (campo de indução magnética). Se o campo magnetizante é  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ , da equação (1.52) podemos escrever que:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} + \mu_0 \mathbf{H}, \text{ ou}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.53)$$

ou ainda;

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} \quad (1.54)$$

Na equação 1.54,  $\mathbf{H}$  indica como  $\mathbf{B}$  é modificado em decorrência da magnetização induzida ( $\mathbf{M}$ ).

## 1.8. Suscetibilidade magnética ( $\chi$ ) e permeabilidade magnética ( $\mu$ )

Como vimos acima, a aplicação de um campo magnético  $H$  em um material induz uma magnetização  $M$  neste material. A magnetização induzida é proporcional ao campo aplicado, a qual pode ser expressa pela relação:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (1.55)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\chi$  é uma propriedade física do material e é denominada de suscetibilidade magnética. Ela representa uma medida da facilidade com que um material é magnetizado. Como  $M$  e  $H$  têm a mesma unidade, a suscetibilidade magnética é adimensional. Das equações (1.53) e (1.55), podemos escrever:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \text{ e}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (1.56)$$

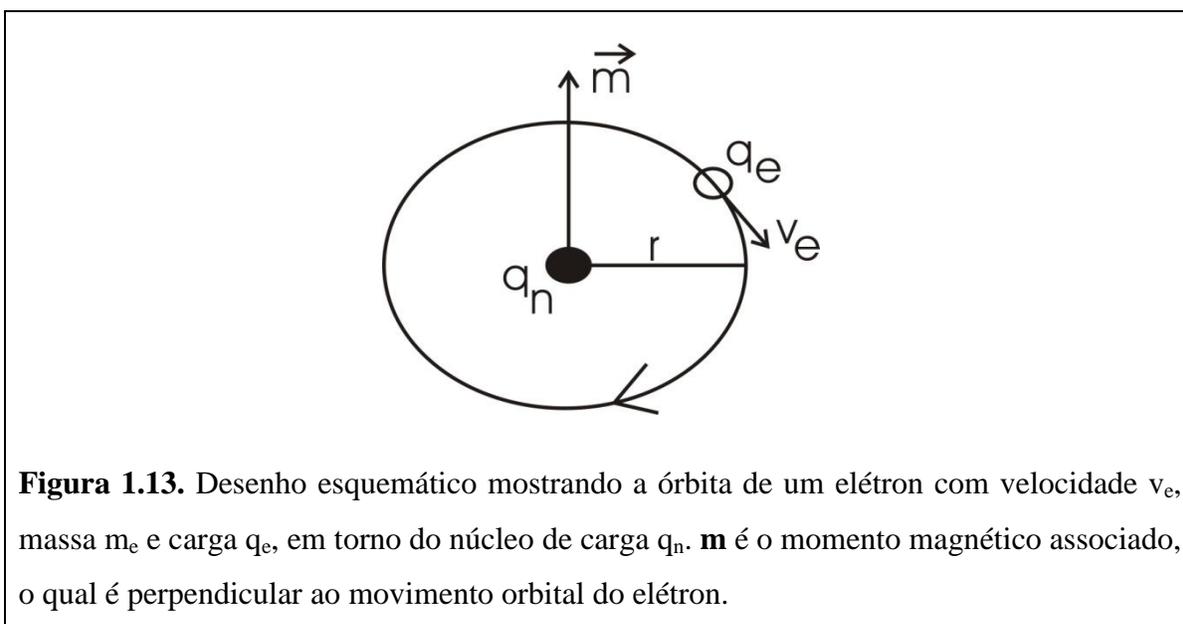
onde  $\mu = (1 + \chi)$  é denominado de permeabilidade magnética do material.

A permeabilidade magnética é uma medida da habilidade que um material tem de transportar as linhas de campo magnético (fluxo magnético). Materiais magnéticos apresentam alta permeabilidade magnética. Certas ligas de alta permeabilidade são produzidas industrialmente para concentrar as linhas de campo em seu meio. Este é o caso do material Permalloy, uma liga composta por 78,5% de níquel e 21,5% de ferro, e do material  $\mu$ metal (mumetal), uma liga composta por 77% de níquel, 16% de ferro, 5% de cobre e 2% de cromo. Cilindros concêntricos constituídos de chapas de  $\mu$ metal são utilizados para eliminar o campo geomagnético em seu interior formando escudos magnéticos. Estes escudos são usados em magnetômetros para medidas da magnetização da rocha, para a realização das desmagnetizações térmica e por campos magnéticos alternados ou mesmo, para guardar amostras de rocha para evitar a indução de magnetização viscosa pelo campo magnético da Terra. Minerais e rochas apresentam baixa permeabilidade magnética ( $\mu \cong 1$ ).

## 1.9. Origem do Magnetismo nos materiais.

Mostramos acima que vários sistemas físicos apresentam momento magnético. Este é o caso de uma espira de corrente, onde o momento magnético ( $m = i A$ ) é representado por um vetor perpendicular ao plano da espira.

O elétron está também associado a um momento magnético em decorrência de seu movimento orbital em torno do núcleo (**Figura 1.13**).



Se o elétron de massa  $m_e$  e carga  $q_e$  está a uma distância  $r$  do núcleo, seu momento magnético  $m$  será igual a:

$$m = i A = i \pi r^2 \quad (1.57)$$

Se sua velocidade é  $v_e$ , então:

$$v_e = \frac{2 \pi r}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{2 \pi r}{v_e} \quad (1.58)$$

onde  $\Delta t$  é o tempo que o elétron leva para dar uma volta em torno do núcleo (distância de  $2\pi r$ ). Por outro lado, a corrente  $i$  é a carga ( $q_e$ ) pelo tempo  $\Delta t$ , isto é:

$$i = \frac{q_e}{\Delta t} \quad (1.59)$$

Substituindo (1.58) em (1.59), teremos:

$$i = \frac{q_e v_e}{2 \pi r} \quad (1.60)$$

Das equações (1.57) e (1.60) podemos escrever que:

$$m = \frac{q_e v_e r}{2} \quad (1.61)$$

Nós sabemos da física quântica que a quantidade de movimento angular do elétron é quantizada e é um número inteiro de  $h / 2\pi$ , onde  $h$  é a constante de Plank ( $\text{kg m}^2 / \text{s}$ ). O momento angular ( $l$ ) associado ao elétron é a sua quantidade de movimento ( $P = m_e v_e$ ) multiplicado pela sua distância ao núcleo do átomo. Assim:

$$l = m_e v_e r = \frac{n h}{2 \pi} \rightarrow v_e r = \frac{n h}{2 \pi m_e} \quad (1.62)$$

De (1.61) e (1.62) tiramos que:

$$m = n \left( \frac{h q_e}{4 \pi m_e} \right) \quad (1.63)$$

Para  $n = 1$  (estado fundamental), o momento magnético associado ao elétron é denominado de magnéton de Bohr ( $m_b$ ) e é dado por:

$$m_b = \frac{h q_e}{4 \pi m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad (1.64)$$

O elétron apresenta também um movimento de rotação (movimento de spin) em torno de seu eixo. Este movimento pode ser no sentido horário ou no sentido anti-horário, o

qual está associado a um momento angular ( $s$ ) que vale  $+1/2$  ou  $-1/2$ , dependendo do seu sentido de rotação. Um momento magnético intrínseco (ou momento de spin -  $m_s$ ) está também associado a este movimento de rotação, o qual vale:

$$m_s = 2 s m_b = m_b \quad (1.65)$$

### 1.10. Estrutura eletrônica dos átomos.

Antes de vermos o comportamento magnético dos materiais, veremos como os elétrons estão distribuídos no átomo, isto é, a sua estrutura eletrônica. No século passado, Schrödinger propôs uma série de equações de onda que descrevem a probabilidade de encontrar o elétron em um ponto  $(r, \theta, \phi)$ , as quais envolvem harmônicos esféricos:

$$\Psi_{l,m,n}(r, \theta, \phi) = A_{l,m,n} P_l^m(\cos \theta) \cos, \sin(m\phi) f_n(r) \quad (1.66)$$

$A_{l,m,n}$  - são amplitudes de probabilidade;

$P_l^m$  - são os polinômios de Legendre;

$\cos, \sin(m\phi)$  - são funções em cosseno e seno que variam com  $\phi$ ;

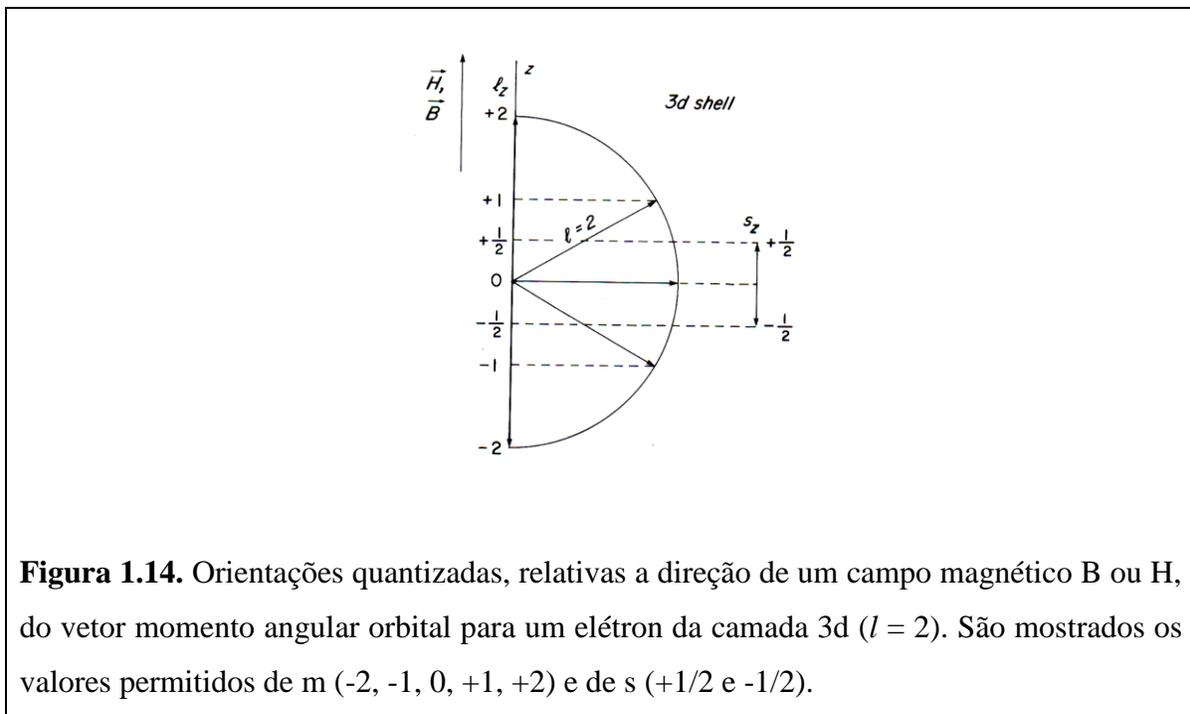
$f_n(r)$  - é uma função que depende da distância ( $r$ ) do elétron ao núcleo.

Os autovalores  $l, m, n$ , associado ao momento de spin  $s$ , são chamados de números quânticos. O número quântico  $n$  representa a camada de energia e é designado por um número inteiro ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ), cada um correspondendo a uma letra maiúscula ( $n = K, L, M, N, O, \dots$ ).

O número quântico  $l$  especifica o momento angular orbital total  $\mathbf{L}$  do elétron.  $l$  pode valer 0 (s), 1 (p), 2 (d), 3 (f), 4 (g),... Para cada valor de  $n$ , podemos ter valores de  $l$  variando entre  $0 \leq l \leq n-1$ . Portanto, para  $n = 1$ , temos um único valor possível para  $l$ , isto é,  $l = 0$  (indicado por 1s, onde 1 representa  $n$  e s representa  $l$ ). Para  $n = 2$ , temos dois valores possíveis para  $l$ , isto é,  $l = 0$  (indicado por 2s) e  $l = 1$  (indicado por 2p). Para  $n = 3$ , temos

três valores possíveis para  $l$ , isto é,  $l = 0$  (3s),  $l = 1$  (3p) e  $l = 2$  (3d). Para  $n = 4$ , temos quatro valores possíveis para  $l$ , isto é,  $l = 0$  (4s),  $l = 1$  (4p),  $l = 2$  (4d) e  $l = 3$  (4f) e assim por diante...

O número quântico  $m$  especifica a componente do momento angular orbital  $L_z$  na direção de um campo magnético aplicado  $B = \mu_0 H$  (**Figura 1.14**). Para cada valor de  $l$ , o número quântico  $m$  apresenta valores inteiros entre  $-l \leq m \leq +l$ . Assim, teremos  $2l + 1$  valores de  $m$ : para  $l = 0$  podemos ter  $m = 0$ , para  $l = 1$ , teremos  $m = -1, 0, +1$ , para  $l = 2$  teremos  $m = -2, -1, 0, +1, +2$ , para  $l = 3$  teremos  $m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ , e assim por diante...



**Figura 1.14.** Orientações quantizadas, relativas a direção de um campo magnético  $B$  ou  $H$ , do vetor momento angular orbital para um elétron da camada 3d ( $l = 2$ ). São mostrados os valores permitidos de  $m$  ( $-2, -1, 0, +1, +2$ ) e de  $s$  ( $+1/2$  e  $-1/2$ ).

Finalmente, o número quântico  $s$  especifica o momento angular de spin  $s$  na direção do campo  $B$ . Para cada valor de  $m$  podemos ter somente dois valores de  $s$ :  $+1/2$  (designado como spin para cima) e  $-1/2$  (designado como spin para baixo). Para cada valor de  $m$  podemos ter somente dois elétrons, um com spin para cima e outro com spin para baixo. Assim, para  $l = s$ , temos  $m = 0$  e podemos ter um máximo de dois elétrons na camada  $s$ . Para  $l = p$ , temos três valores de  $m$  ( $-1, 0, +1$ ) e podemos ter um máximo de 6 elétrons na camada  $p$ . Para  $l = d$ , temos 5 valores possíveis de  $m$  ( $-2, -1, 0, +1, +2$ ) e podemos ter um máximo de 10 elétrons na camada  $d$ . Para  $l = f$ , temos 7 valores possíveis de  $m$  ( $-3, -2, -1,$

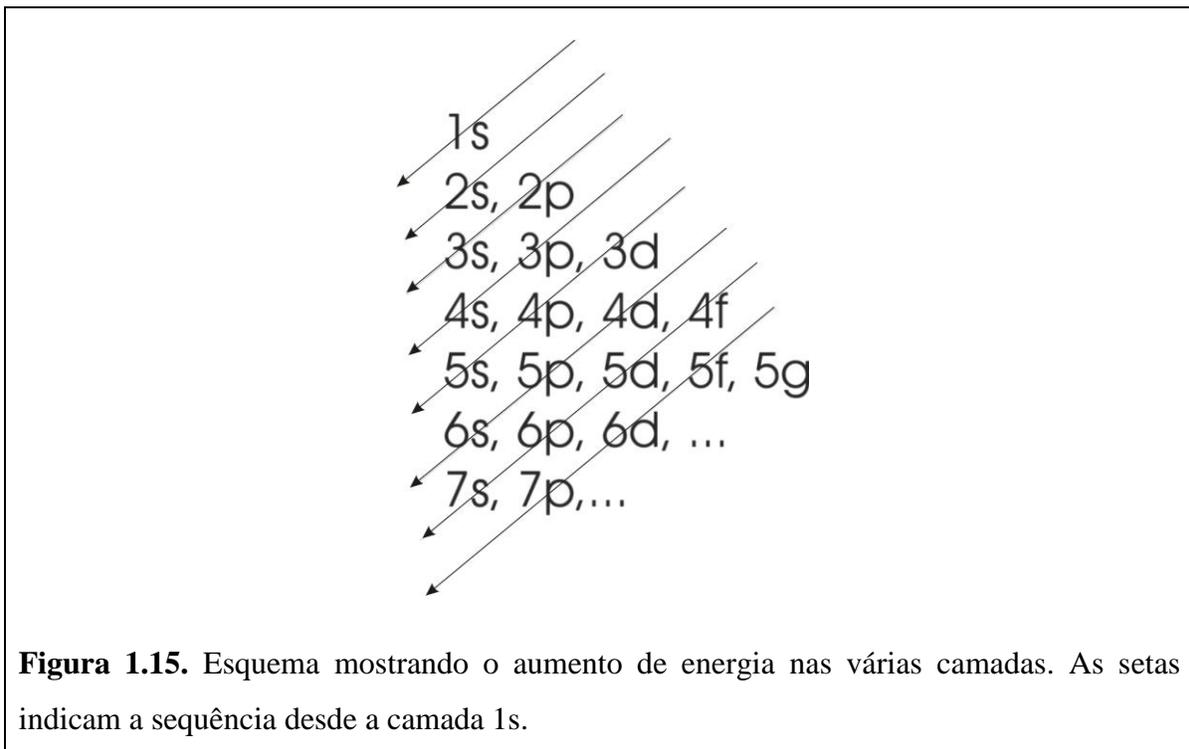
0, +1, +2, +3) e podemos ter um máximo de 14 elétrons na camada f. Assim, por diante para as demais camadas.

Existem três regras para o preenchimento da estrutura eletrônica dos elétrons:

- 1- O princípio de Pauli diz que dois elétrons em um átomo não podem ter os quatro números quânticos iguais. Assim, se  $n$ ,  $l$  e  $m$  são iguais, um deles deve ter o valor de  $s = +1/2$  e o outro o valor de  $s = -1/2$ .
- 2- As órbitas são preenchidas segundo o aumento de energia. A **Figura 1.15** mostra como ocorre o aumento de energia nas várias camadas. As setas indicam a sequência de aumento da energia:  $1s^2$ ,  $2s^2$ ,  $2p^6$ ,  $3s^2$ ,  $3p^6$ ,  $4s^2$ ,  $3d^{10}$ ,  $4p^6$ ,  $5s^2$ ,... Note que a camada  $4s^2$  é preenchida antes da camada  $3d^{10}$ .
- 3- A regra de Hund diz que os elétrons devem ser preenchidos de tal modo que os spins sejam tão paralelos quanto possível. A **Figura 1.16** mostra a estrutura eletrônica de alguns elementos da tabela periódica. Note que ao começarmos a preencher uma camada de energia  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,..., colocamos primeiramente todos os spins para cima até completar todas as subcamadas de número quântico  $m$  possíveis. Somente então iniciamos a colocação dos spins para baixo.

Note que os elementos químicos a partir do Escândio (Sc) apresentados na **Figura 1.16** apresentam elétrons na camada  $3d$ , sendo que para muitos deles (incluindo o Fe), temos spins magnéticos não emparelhados e, portanto, momento magnético resultante. Estes elementos são chamados de elementos de transição. Abaixo, apresentamos a estrutura eletrônica do  $Fe^{26}$ :  $1s^2$ ,  $2s^2$ ,  $2p^6$ ,  $3s^2$ ,  $3p^6$ ,  $4s^2$ ,  $3d^6$ . Temos seis elétrons na camada  $d$  e quatro spins não emparelhados, isto é, temos um momento magnético resultante de  $4 m_b$  no Fe. Um fato importante é que quando um destes elementos torna-se um íon, ele perde primeiramente os elétrons da camada  $4s$  (mais externa), para depois começar a perder os elétrons da camada  $3d$ . Por exemplo, o íon  $Fe^{2+}$  perde os dois elétrons da camada  $4s^2$  e a sua estrutura eletrônica será:  $1s^2$ ,  $2s^2$ ,  $2p^6$ ,  $3s^2$ ,  $3p^6$ ,  $3d^6$ . Deste modo, o  $Fe^{2+}$  tem momento magnético resultante de  $4 m_b$ , como no caso do átomo de  $Fe^{26}$ . Já o íon  $Fe^{3+}$ , além de perder os dois elétrons da camada  $4s^2$  perde também um elétron da camada  $3d$ . A estrutura

eletrônica do  $\text{Fe}^{3+}$  será:  $1s^2$ ,  $2s^2$ ,  $2p^6$ ,  $3s^2$ ,  $3p^6$ ,  $3d^5$  e teremos um momento magnético resultante de  $5 m_b$ . Os elementos de transição, pelo fato de suas ligações com outros elementos (por exemplo, o oxigênio –  $\text{O}^{2-}$ ) acontecerem através dos elétrons da camada  $4s^2$  mais externa, possibilitam a existência de momentos magnéticos resultantes nos minerais dos quais estes elementos fazem parte. São justamente estes minerais que apresentam propriedades magnéticas que os caracterizam como paramagnéticos e ferromagnéticos, como veremos mais adiante.



**Figura 1.15.** Esquema mostrando o aumento de energia nas várias camadas. As setas indicam a sequência desde a camada 1s.

Element	n=0	n=1	n=2					n=3
	1s <sup>2</sup>	2s <sup>2</sup> 2p <sup>6</sup>	3s	3p			3d	4s
			↑	x	y	z		
Na			↑					
Mg			↑↓					
Al			↑	↑				
Si			↑	↑	↑			
P			↑	↑	↑	↑		
S			↑↓	↑	↑	↑		
Cl			↑↓	↑↓	↑	↑		
A			↑↓	↑↓	↑↓	↑		
K	1s <sup>2</sup>		↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	xy xz yz x <sup>2</sup> -y <sup>2</sup> z <sup>2</sup>	
Ca			↑↓	↑↓	↑↓	↑↓		↑
Sc			3s <sup>2</sup>	3p <sup>6</sup>			↑	↑↓
Ti							↑	↑↓
V							↑	↑↓
Cr							↑	↑↓
Mn							↑	↑↓
Fe							↑	↑↓
Co							↑	↑↓
Ni							↑	↑↓
Cu							↑	↑↓
Zn							↑	↑↓

**Figura 1.16.** Estrutura eletrônica dos elementos químicos, desde o Na até o Zn. (Fonte: Tauxe, 2005)

## 1.11. Propriedades magnéticas dos materiais.

Os materiais podem ser classificados em diamagnéticos, paramagnéticos ou ferromagnéticos de acordo com a sua reação diante da aplicação de um campo magnético. Estes comportamentos estão associados aos movimentos orbitais e de spin dos elétrons como veremos a seguir.

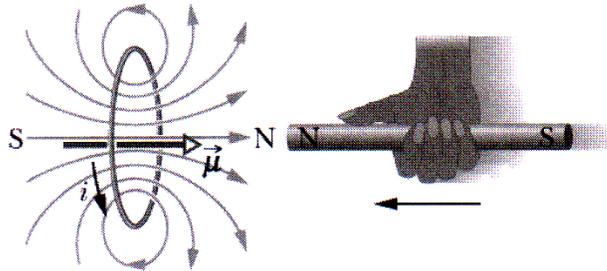
### 1.11.1. Diamagnetismo.

Em 1846, Faraday descobriu que um pequeno pedaço de bismuto, quando colocado perto do pólo de um ímã era repellido por ele. Ele chamou estas substâncias de diamagnéticas. Quando um elétron em sua órbita em torno do núcleo, é submetido a um campo magnético  $\mathbf{B}$ , ele executa um movimento de precessão em torno da direção do campo, com a frequência de Larmor:

$$\Delta W = \pm \frac{q_e B}{2 m_e} \quad (1.67)$$

onde  $q_e$  e  $m_e$  são, respectivamente, a carga e a massa do elétron.

Este efeito produz uma componente de rotação (e, por consequência, de momento angular) adicional de sentido oposto ao movimento de translação do elétron. Como consequência, um fraco campo (associado a uma fraca magnetização) é induzido na direção oposta ao campo aplicado. Este fenômeno é similar ao descrito pela Lei de Lenz. Quando aproximamos uma barra de ímã de uma espira surgirá uma corrente  $i$  na espira. O sentido de  $i$  é tal que o campo originado por ela se opõe ao campo indutor produzido pela barra do ímã (**Figura 1.17**).

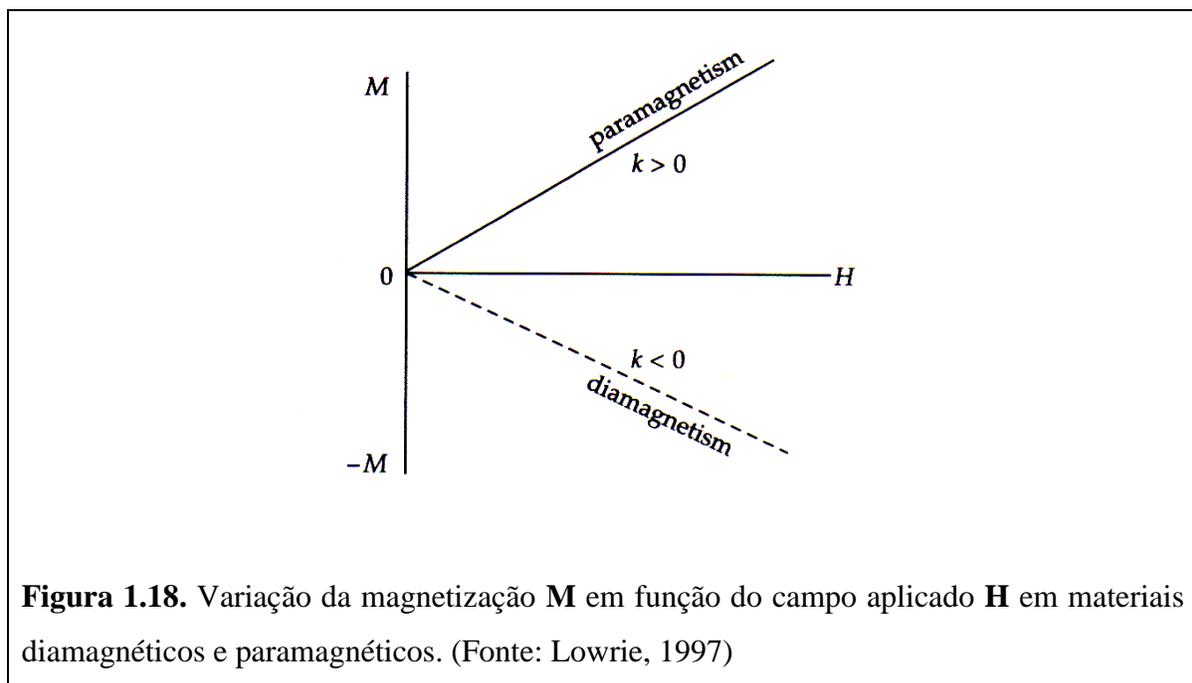


**Figura 1.17.** Aplicação da lei de Lenz. Quando um ímã se aproxima da espira, uma corrente é induzida na espira. A espira produz outro campo magnético, cujo momento dipolar magnético  $\mu$  está orientado de tal forma que se opõe ao campo indutor do ímã. (Fonte: Halliday et al., 2005)

Todos os materiais apresentam reação diamagnética quando submetidos a um campo magnético. Entretanto, este efeito é geralmente mascarado pelos efeitos mais fortes do paramagnetismo e do ferromagnetismo. Assim, a reação diamagnética é caracteristicamente observada em materiais em que todos os spins dos elétrons estão

emparelhados. Outra característica dos materiais diamagnéticos é a de que a magnetização desaparece quando o campo é retirado.

A suscetibilidade magnética dos materiais diamagnéticos é fraca e negativa ( $\sim -10^{-6}$ ) (**Figura 1.18**). Exemplos de minerais diamagnéticos são: quartzo ( $\text{SiO}_2$ ), calcita ( $\text{CaCO}_3$ ), água ( $\text{H}_2\text{O}$ ), halita ( $\text{NaCl}$ ), silvita ( $\text{KCl}$ ), grafite ( $\text{C}$ ), gipsita ( $\text{Ca}[\text{SO}_4]_2\text{H}_2\text{O}$ ) e zircão ( $\text{ZnSiO}_4$ ). Podemos citar também o mercúrio, a prata, o bismuto, o álcool etílico, o cobre, o dióxido de carbono e o nitrogênio.



### 1.11.2. Paramagnetismo.

Minerais que apresentam comportamento paramagnético possuem momento magnético resultante, devido aos spins não emparelhados de seus íons. Entretanto, devido à energia térmica, estes momentos magnéticos estão orientados ao acaso dentro do material e a magnetização resultante é nula. Ao aplicarmos um campo magnético nos materiais paramagnéticos, surge uma fraca magnetização no mesmo sentido do campo aplicado. A suscetibilidade magnética destes materiais é, portanto, fraca e positiva (**Figura 1.18**). Ao retirarmos o campo externo, entretanto, a magnetização volta a ser zero.

Um modelo útil para explicar o paramagnetismo foi apresentado por P. Langevin, em 1905. Seu modelo observa as seguintes premissas:

1. Cada spin não emparelhado contribui com um momento de dipolo;
2. Na ausência de um campo aplicado, os momentos magnéticos estão orientados ao acaso;
3. Um campo aplicado age no sentido de criar um momento magnético resultante na direção do campo aplicado;
4. Há uma competição entre a energia térmica ( $E_T = kT$ , onde  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura) e a energia magnética  $E_m$  (**Figura 1.11**):

$$E_m = -m_b \cdot B = -\mu_0 m_b \cdot H = -\mu_0 m_b H \cos \theta \quad (1.68)$$

A mecânica estatística da termodinâmica diz que a densidade de probabilidade  $P_{(E)}$  de algum dado momento magnético ter energia  $E_m$  é:

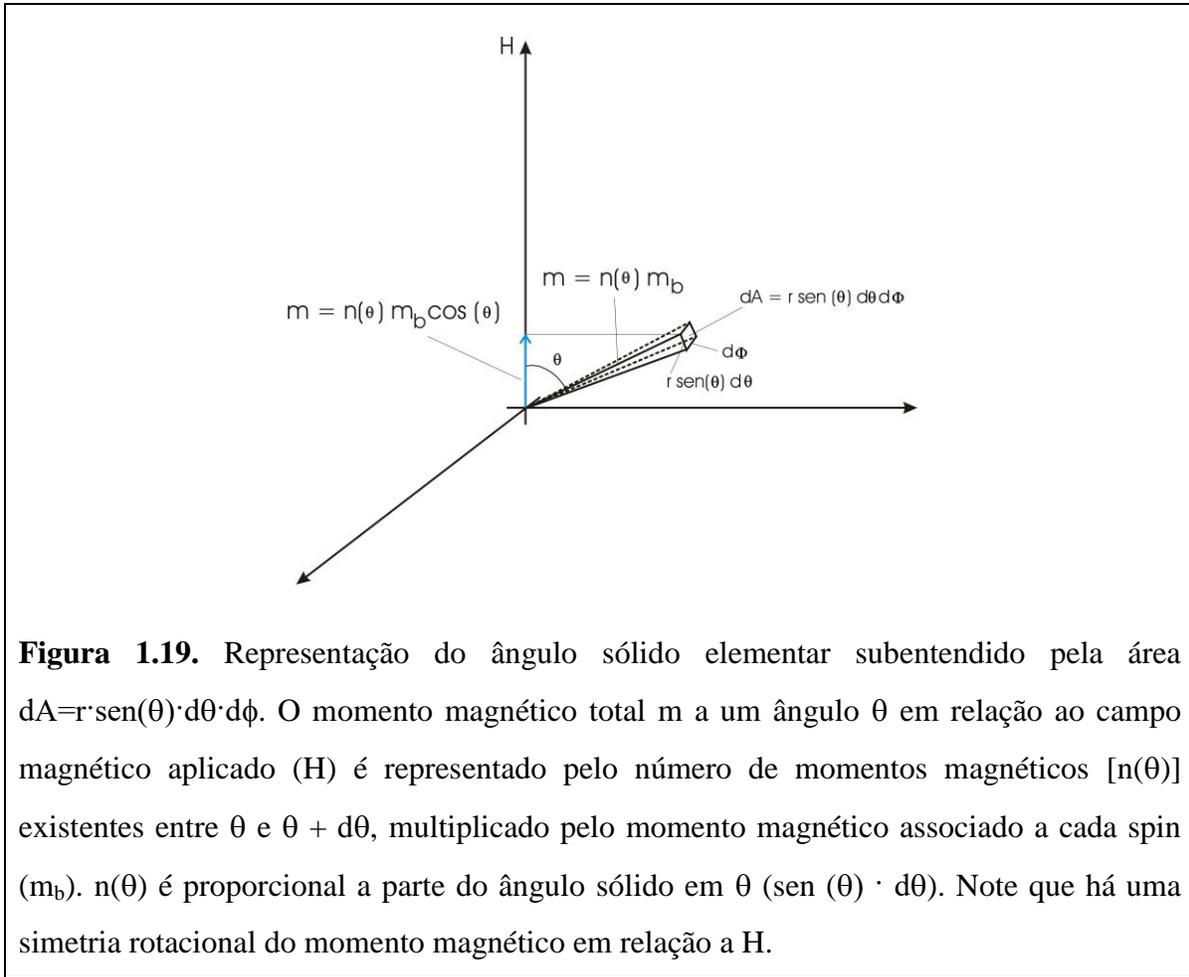
$$P_{(E)} \propto \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right) \quad (1.69)$$

Agora, o número de momentos magnéticos  $n(\theta)$  existentes entre  $\theta$  e  $(\theta + d\theta)$ , com respeito ao campo  $H$ , é proporcional a parte do ângulo sólido em  $\theta$ , que vale  $(\sin(\theta) d\theta)$ . Utilizando a função densidade de probabilidade (1.69), podemos escrever que:

$$n(\theta)d\theta \propto \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right) \sin(\theta)d\theta \quad (1.70)$$

A magnetização induzida é medida somente na direção do campo aplicado (**Figura 1.19**), isto é:

$$n(\theta) m_b \cos(\theta) \quad (1.71)$$



A magnetização média ( $M$ ) de uma população de partículas de um material de volume  $V$  será então, igual a:

$$M = \left(\frac{m_b}{V}\right) \int_0^\pi n(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (1.72)$$

Agora, se o material for levado ao estado de saturação, isto significa que todos os momentos magnéticos estarão alinhados ao campo aplicado. Se  $N$  é o número total de momentos, então:

$$N = \int_0^\pi n(\theta) d\theta \quad (1.73)$$

Entretanto, a magnetização de saturação ( $M_s$ ) é dado por:

$$M_s = \frac{N m_b}{V} = \left( \frac{m_b}{V} \right) \int_0^\pi n(\theta) d\theta \quad (1.74)$$

De (1.72) e (1.74), podemos escrever que:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\int_0^\pi n(\theta) \cos(\theta) d\theta}{\int_0^\pi n(\theta) d\theta} \quad (1.75)$$

Ainda, usando a equação (1.70),  $M/M_s$  fica:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\int_0^\pi \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right) \sin(\theta) d\theta}$$

ou ainda, usando (1.68), podemos escrever:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m_b H \cos(\theta)}{kT}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{\mu_0 m_b H \cos(\theta)}{kT}\right) \sin(\theta) d\theta} \quad (1.76)$$

Substituindo na equação (1.76)  $\mu_0 m_b H/kT = \alpha$  e  $\cos(\theta) = x$ , teremos a expressão:

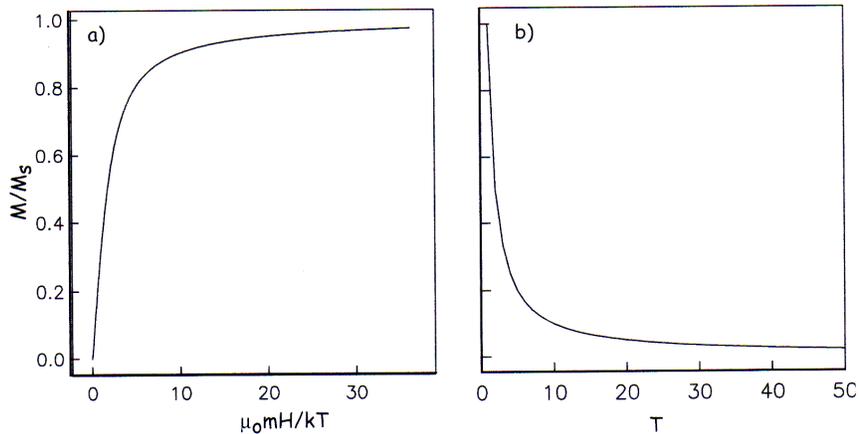
$$\frac{M}{M_s} = \frac{\int_{-1}^{+1} e^{\alpha x} x dx}{\int_{-1}^{+1} e^{\alpha x} dx} \quad (1.77)$$

A solução da equação (1.77) é:

$$\frac{M}{M_s} = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})}{(e^\alpha - e^{-\alpha})} - \frac{1}{\alpha} \quad (1.78)$$

ou ainda,

$$\frac{M}{M_s} = [\coth(\alpha) - \frac{1}{\alpha}] = L(\alpha) \quad (1.79)$$



**Figura 1.20.** (a) Magnetização paramagnética (obtida da função de Langevin,  $L(\alpha)$ ) em função de  $\alpha = \mu_0 m_b H / kT$ . (b) Magnetização paramagnética em função da temperatura  $T$  (lei de Curie). (Fonte: Tauxe, 2005)

A equação (1.79) é conhecida como equação de Langevin para o paramagnetismo. A **Figura 1.20** mostra a resolução gráfica desta equação ( $M/M_s$  versus  $\alpha$ ). Note que a magnetização se aproxima da saturação quando  $\mu_0 m_b H$  é aproximadamente 10 a 20 vezes o valor de  $kT$ . Quando  $kT \gg \mu_0 m_b H$ ,  $L(\alpha)$  é aproximadamente linear. Neste caso, podemos desenvolver a  $\coth(\alpha)$  na série:

$$\coth(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{45} \dots \quad (1.80)$$

Utilizando somente os dois primeiros termos da série da equação (1.80), teremos:

$$\frac{M}{M_s} \cong \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{\alpha} \cong \frac{\alpha}{3} \quad (1.81)$$

ou,

$$\frac{M}{M_s} \cong \frac{\mu_0 m_b}{3kT} H \quad (1.82)$$

Podemos escrever a equação (1.82) de outro modo:

$$\frac{M}{H} \cong \frac{\mu_0 m_b}{3kT} M_s \quad (1.83)$$

Mas, da equação (1.74),

$$M_s = \frac{N m_b}{V} \quad (1.84)$$

Assim, substituindo  $M_s$  na equação (1.83) e rearranjando os termos, podemos escrever:

$$\frac{M}{H} = \frac{\mu_0 N m_b^2}{3kV} \frac{1}{T} = \chi_p \quad (1.85)$$

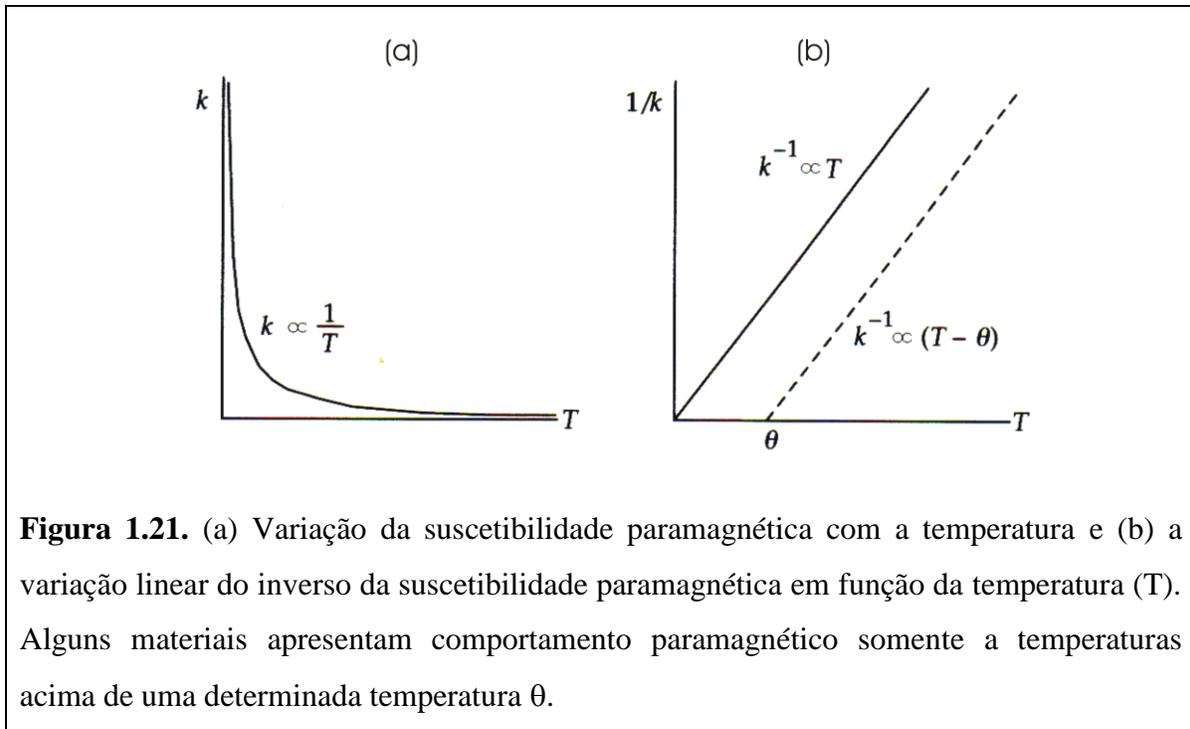
onde  $\chi_p$  é a suscetibilidade paramagnética. Note que o primeiro termo depois da igualdade na equação (1.85) é uma constante. Assim podemos re-escrever esta equação da seguinte forma:

$$\frac{M}{H} = \frac{C}{T} = \chi_p \quad (1.86)$$

onde  $C = \frac{\mu_0 N m_b^2}{3kV}$

A equação (1.86) é denominada de **lei de Curie para o paramagnetismo**. Ela mostra que a suscetibilidade paramagnética varia com o inverso da temperatura. A **Figura 1.21a** mostra o gráfico da suscetibilidade paramagnética em função da temperatura e a **Figura 1.21b** mostra a variação de  $\chi_p^{-1}$  em função de  $T$ , a qual é representada por uma reta passando pela origem. Alguns materiais só são paramagnéticos acima de uma determinada temperatura  $\theta$ , como veremos mais adiante. A **Figura 1.21b** mostra a variação de  $\chi_p^{-1}$  para temperaturas  $T > (T - \theta)$ .

A suscetibilidade paramagnética ( $10^{-5} - 10^{-4}$  SI) é duas a três ordens de grandeza maior do que a suscetibilidade de materiais diamagnéticos. Exemplos de minerais paramagnéticos são: Ilmenita ( $\text{FeTiO}_3$ ), Siderita ( $\text{FeCO}_3$ ), Rutilo ( $\text{TiO}_2$ ), Clorita (silicato de Fe, Mg, Al), piroxênio (Mg, Ca, Fe) e Olivina ( $(\text{MgFe})_2\text{SiO}_4$ ).



### 1.11.2. Ferromagnetismo.

Nos materiais paramagnéticos e diamagnéticos, as interações entre momentos magnéticos atômicos individuais são pequenas e frequentemente desprezíveis. Entretanto, em alguns metais (Fe, Ni, Co) os átomos ocupam posições na rede cristalina, próximas o suficiente para permitir uma interação de troca (também chamada de energia de troca) entre os elétrons vizinhos. Esta interação de troca produz um forte campo molecular dentro do metal, o qual alinha os momentos magnéticos atômicos e produz uma magnetização espontânea. Estes materiais são chamados coletivamente de ferromagnéticos e interagem fortemente com campos magnéticos externos.

Foi Weiss quem introduziu o conceito de campo molecular ( $H_w$ ). Na sua teoria, o campo molecular é proporcional a magnetização  $M$  do material, isto é:

$$H_w = \beta M \quad (1.87)$$

onde  $\beta$  é a constante de proporcionalidade.

Se aplicarmos um campo  $H$  a um material, o campo total ( $H_t$ ) no interior do material será:

$$H_t = H + H_w = H + \beta M \quad (1.88)$$

Por analogia com o paramagnetismo, podemos substituir  $\alpha$  na equação (1.79) por:

$$\alpha = \frac{\mu_0 m_b (H + \beta M)}{kT} \quad (1.89)$$

Assim, podemos escrever (1.79) como:

$$\frac{M}{M_s} = L \left[ \frac{\mu_0 m_b (H + \beta M)}{kT} \right] \quad (1.90)$$

Quando a temperatura aumenta, os cristais se expandem e as interações de troca ficam mais fracas. Acima de uma temperatura característica, a energia térmica é dominante e o mineral perde as propriedades ferromagnéticas. A temperatura em que isto ocorre é denominada de temperatura de Curie ( $T_C$ ). Cada mineral magnético apresenta uma temperatura de Curie característica. Assim, podemos analisar a equação (1.90) em duas situações:

Situação 1- Temperaturas  $T > T_C$ , isto é,  $(T - T_C) > 0$

Neste caso, o campo molecular interno é zero ( $H_w = \beta M = 0$ ). Assim, podemos usar a aproximação  $kT \gg \mu_0 m_b H$  e escrever a equação (1.90) da seguinte forma:

$$\frac{M}{H} = \left( \frac{\mu_0 N m_b^2}{3kV} \right) \frac{1}{T - T_C} = \chi_f \quad (1.91) \text{ ou}$$

$$\frac{M}{H} = \frac{C}{(T - T_C)} = \chi_f \quad (1.92)$$

onde  $C = \frac{\mu_0 N m_b^2}{3kV}$

A equação (1.92) é conhecida como Lei de Curie-Weiss e governa a suscetibilidade ferromagnética acima da temperatura de Curie ( $T_C$ ).

Situação 2- Temperaturas  $T < T_C$ .

Abaixo da temperatura de Curie, podemos descartar o campo externo na equação (1.90):

$$\frac{M}{M_s} = L \left( \frac{\mu_0 m_b \beta M}{kT} \right) \quad (1.93)$$

Sabendo que  $M_s = \frac{N m_b}{V}$ , podemos re-escrever a equação (1.93) da seguinte forma:

$$\frac{M}{M_s} = L \left[ \left( \frac{\mu_0 N m_b^2 \beta}{V k} \right) \frac{1}{T} \frac{M}{M_s} \right] \quad (1.94)$$

ou,

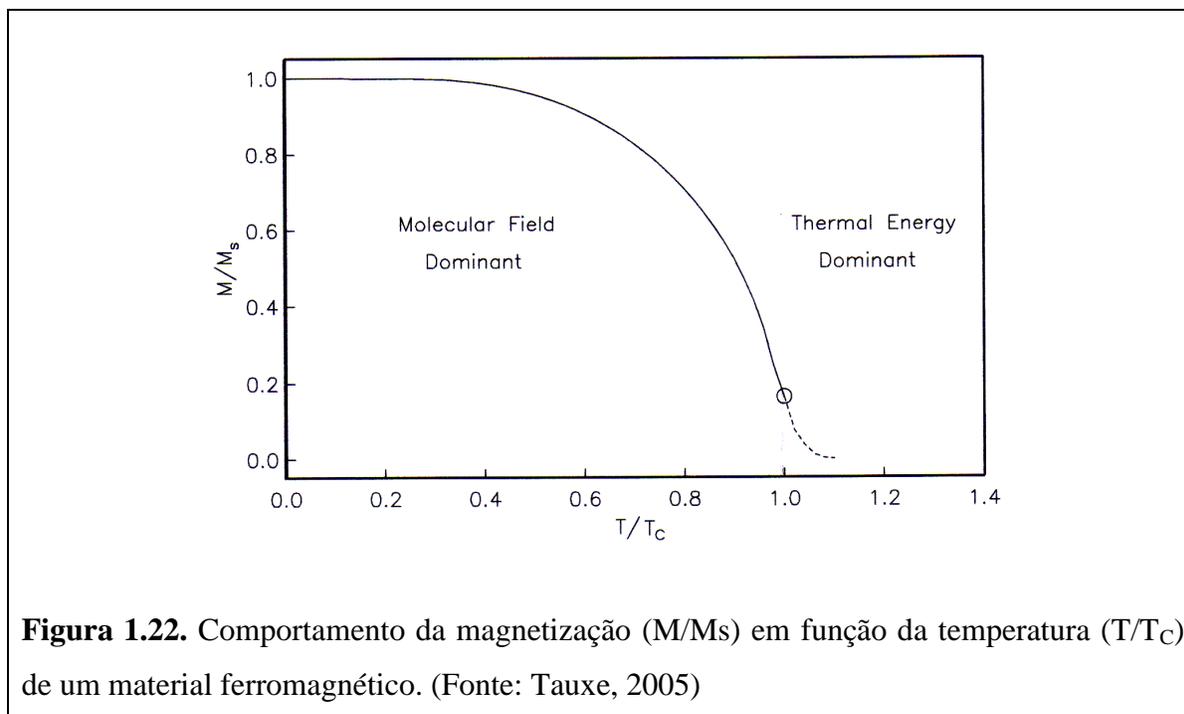
$$\frac{M}{M_s} = L \left[ \left( \frac{T_C}{T} \right) \left( \frac{M}{M_s} \right) \right] \quad (1.95)$$

onde  $T_C = \left( \frac{\mu_0 N m_b^2 \beta}{V k} \right)$  é definida como sendo a temperatura de Curie.

A solução gráfica da equação (1.95) é apresentada na **Figura 1.22**. Podemos separar dois intervalos de temperaturas em que o material ferromagnético muda de comportamento. Acima da temperatura de Curie, a energia térmica é dominante, o material passa a ter um comportamento paramagnético e a magnetização é governada pela equação (1.93). Abaixo desta temperatura, o campo molecular predomina, o material é ferromagnético e a magnetização é governada pela equação (1.95). É importante salientar, entretanto, que a transição do comportamento ferromagnético para o comportamento paramagnético é gradual, sendo que o material se torna definitivamente paramagnético somente acima de uma temperatura  $\theta$  (vide **Figura 1.21**), maior do que a temperatura de Curie ( $\theta > T_C$ ). A transição gradual do comportamento ferromagnético para paramagnetismo é explicada pela persistência do campo molecular em orientar os momentos magnéticos, a temperaturas acima de  $T_C$ .

A principal diferença do tratamento clássico mostrado acima e o da mecânica quântica é o fato que na mecânica quântica, somente certos ângulos dos momentos magnéticos são permitidos e não todos como no modelo de Langevin. No final, a predição da magnetização

em função da temperatura difere em detalhes e este modelo pode ser utilizado para entendermos o fenômeno do ferromagnetismo.



#### 1.11.2.1. Curva de histerese.

Mostramos acima que os materiais ferromagnéticos apresentam a característica de perder as propriedades ferromagnéticas acima da temperatura de Curie ( $T_C$ ). Outra característica dos materiais ferromagnéticos é a sua propriedade de produzir histerese quando um campo magnético é aplicado nestes materiais. Mesmo quando o campo é retirado o material retém magnetização remanente ( $M_r$ ). A **Figura 1.23** mostra uma curva de histerese (Magnetização versus campo aplicado) obtida para um material ferromagnético com magnetização inicial nula. Somente com a aplicação de campos muito baixos, a curva é reversível (parte **a** da curva, em vermelho). Quando aumentamos o campo aplicado (parte **b** da curva, em azul), a magnetização correspondente aumenta até atingirmos o campo de saturação. Neste ponto, um aumento do campo não produz mais aumento da magnetização.

A amostra atingiu a saturação e a magnetização correspondente é denominada magnetização de saturação ( $M_s$ ). Ao diminuirmos o campo aplicado, a curva não volta mais pelo mesmo caminho (parte  $c$  da curva, em amarelo). Quando o campo atinge o valor zero a amostra retém uma magnetização residual, a qual é denominada de magnetização remanente de saturação ( $M_r$ ), pelo fato de a magnetização ter atingido anteriormente a saturação. Agora, se aplicarmos um campo no sentido oposto (parte  $d$  da curva, em verde) a magnetização será nula com a aplicação do campo  $H_c$ , denominado de campo coercivo. Este campo define a coercividade associada ao material ferromagnético. Se neste ponto, diminuirmos o campo aplicado até zero, a amostra apresentará magnetização remanente. Na figura, o campo  $H_{cr}$ , denominado de coercividade de remanência, correspondente ao campo em que a magnetização remanente da amostra é nula após a retirada do campo. Podemos atingir a magnetização de saturação (parte  $e$  da curva, em cinza) aumentando o campo até o campo de saturação no sentido oposto. Diminuindo o campo até zero e invertendo novamente o sentido do campo, construímos a parte  $f$  da curva (em preto). Deste modo, fechamos o **ciclo de histerese** do material ferromagnético.

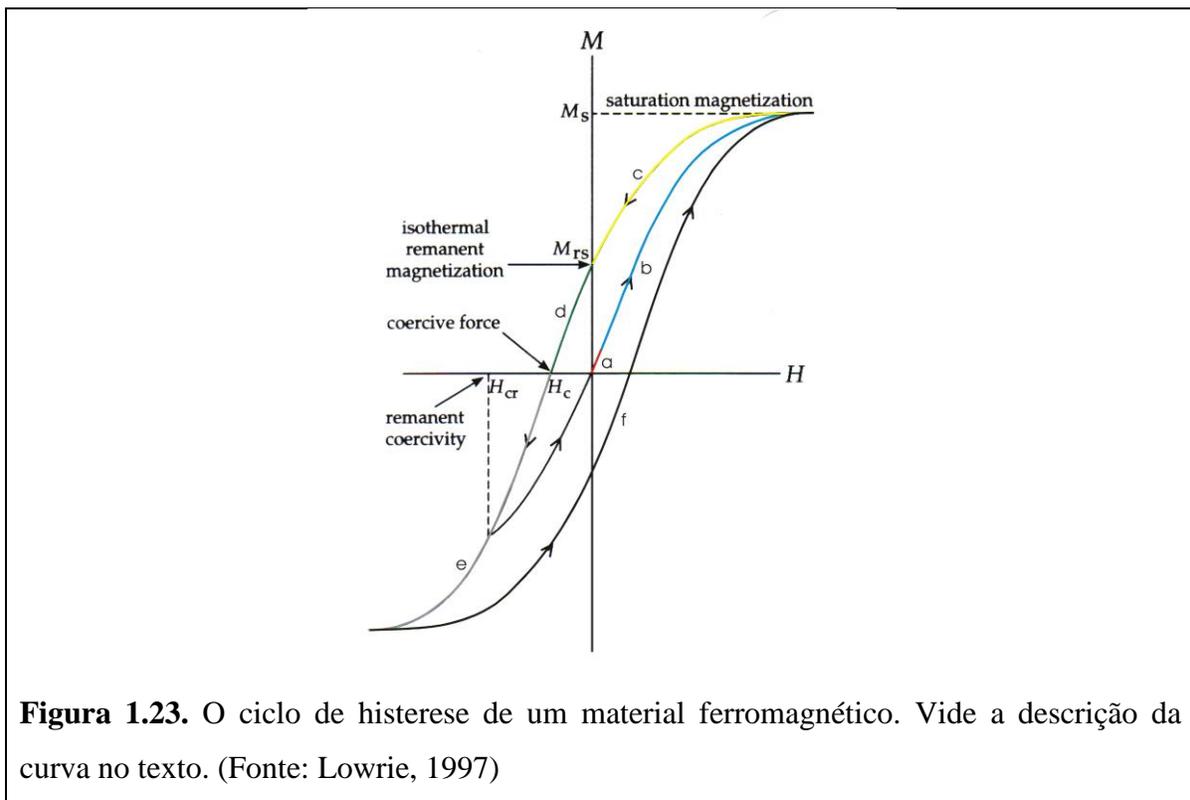
Os parâmetros  $M_r$ ,  $M_s$ ,  $H_c$  e  $H_{cr}$  são dependentes dos tamanhos dos grãos ferromagnéticos e podem fornecer informações sobre as estruturas de domínios magnéticos.

### 1.11.3. Tipos de Ferromagnetismo.

O termo ‘materiais ferromagnéticos’ é usado de uma maneira genérica para descrever as propriedades que determinados materiais apresentam de reter magnetização remanente. Na realidade, o ‘ferromagnetismo puro’, isto é, em que os momentos dos spins na rede cristalina estão orientados no mesmo sentido (interação de troca positiva) ao longo de determinados eixos cristalográficos (**Figura 1.24a**), não é encontrado na natureza. Alguns compostos e ligas podem ser ferromagnéticos. Podemos citar como exemplo o dióxido de cromo ( $CrO_2$ ) que é o componente da fita magnética usada para gravação. O ferro puro é outro material ferromagnético, o qual apresenta temperatura de Curie de  $770^\circ C$ .

Em certos óxidos de ferro, a interação entre os íons de ferro é antiparalelo, sendo que os momentos magnéticos de íons vizinhos são iguais e opostos (interação de troca

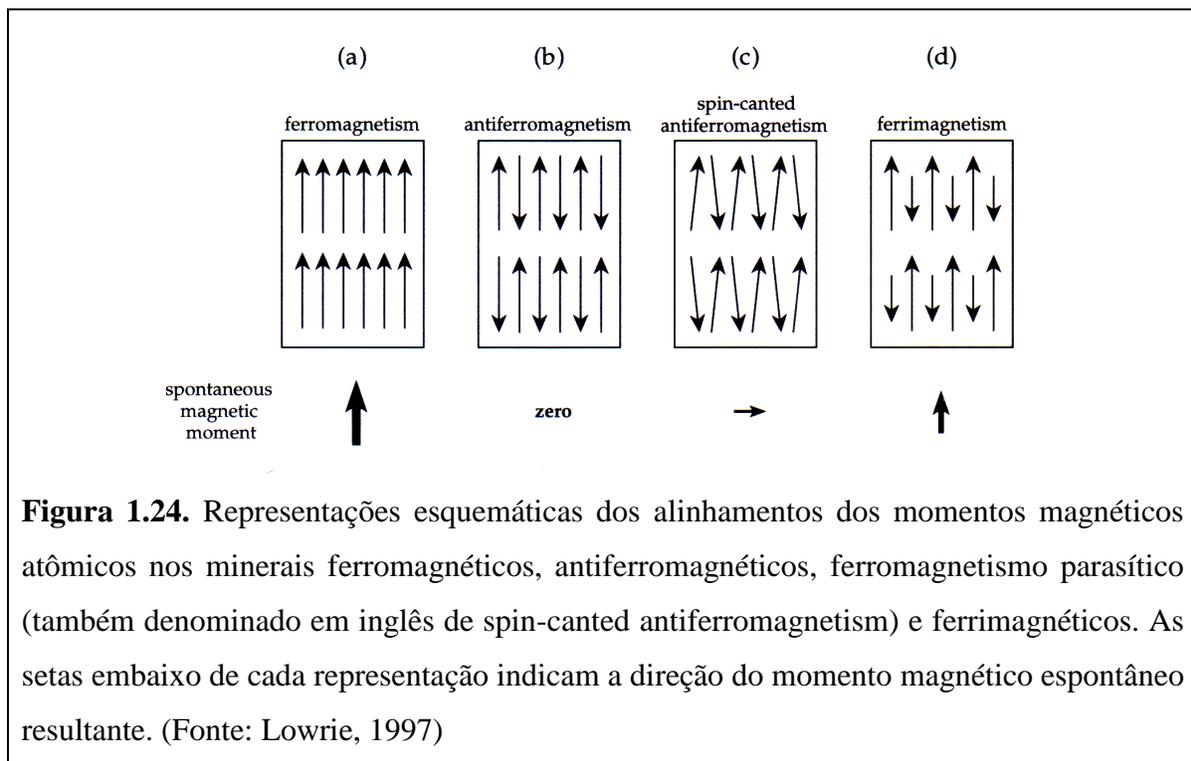
negativa), produzindo uma magnetização total nula (**Figura 1.24b**). Como resultado, a suscetibilidade de um cristal antiferromagnético é baixa e positiva. Como no caso dos materiais ferromagnéticos, os antiferromagnéticos perdem suas propriedades intiferromagnéticas em uma determinada temperatura, denominada de temperatura de Néel ( $T_N$ ). Podemos citar como exemplo de mineral antiferromagnético, a ilmenita ( $\text{FeTiO}_3$ ). Entretanto, a sua temperatura de Néel é muito baixa ( $T_N = 50 \text{ K}$ ) e na temperatura ambiente a ilmenita é paramagnética.



**Figura 1.23.** O ciclo de histerese de um material ferromagnético. Vide a descrição da curva no texto. (Fonte: Lowrie, 1997)

Quando um mineral antiferromagnético contém defeitos, lacunas ou impurezas na rede cristalina, alguns spins antiparalelos tornam-se desprovidos de seus pares e uma fraca magnetização pode resultar destas imperfeições. Os momentos associados a esta magnetização são denominados de momentos de defeito. Outro efeito que ocorre em alguns minerais antiferromagnéticos é a ligeira inclinação (menor do que  $1^\circ$ ) dos spins tirando-os do antiparalelismo exato. Surge então, uma fraca magnetização resultante na direção perpendicular à orientação dos spins e este fenômeno é chamado de ferromagnetismo parasítico (**Figura 1.24c**). Materiais que apresentam este tipo de ferromagnetismo mostram

características típicas de um material ferromagnético, incluindo histerese, magnetização espontânea e temperatura de Curie. Podemos citar como exemplo, a hematita ( $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ), onde tanto a inclinação dos spins como defeitos da rede cristalina (momentos de defeito) contribuem para as propriedades ferromagnéticas. A hematita apresenta uma magnetização espontânea fraca e variável, de aproximadamente 2,2 kA/m, coercividades muito altas e temperatura de Curie de 675°C. As variações nas propriedades magnéticas da hematita decorrem da importância relativa entre os defeitos e momentos dos spins inclinados.



Quando o processo de interação envolve momentos magnéticos antiparalelos e desiguais na rede cristalina, resulta em uma magnetização espontânea, fenômeno este denominado de ferrimagnetismo (**Figura 1.24d**). Acima de uma determinada temperatura, o mineral ferrimagnético perde as propriedades ferrimagnéticas; esta temperatura é denominada de temperatura de Néel, ou muito frequentemente, também chamada de temperatura de Curie. O mineral ferrimagnético mais importante é a magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), o qual apresenta temperatura de Curie de  $\sim 580^\circ\text{C}$ . Outro mineral de relativa importância é a

pirrotita representada por um sulfeto de ferro de composição  $\text{Fe}_7\text{S}_8$ . Sua temperatura de Curie é de  $320^\circ\text{C}$ .

Fonte bibliográfica

1. David J. Dunlop, Özden Özdemir – Rock Magnetism, Fundamentals and Frontiers, Cambridge University Press, 1997;
2. William Lowrie – Fundamentals of Geophysics, Cambridge University Press, 1997;
3. R. B. Butler, Paleomagnetism: Magnetic Domains to Geologic Terranes., 1992.  
[http://geography.lancs.ac.uk/cemp/resources/Butler\\_book/contents.htm](http://geography.lancs.ac.uk/cemp/resources/Butler_book/contents.htm);
4. Halliday, Resnick and Walker, Fundamentos de Física, Volume 3, Eletromagnetismo. John Wiley & Sons, Inc, 2005;
5. Lisa Tauxe, Lectures in Paleomagnetism, 2005.  
<http://earthref.org/MAGIC/books/Tauxe/2005/>