

MAP 3122: Métodos Numéricos e Aplicações

Prova 2 (3 horas) - 20/04/2020

Prof. Antoine Laurain

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Calculadora e notas de aula são permitidos. **Justifique suas respostas e verifique seus cálculos.**

Exercício 1. (2 pontos) Seja a função f tabelada:

x_i		0		1		2		3
$f(x_i)$		1		1		2		2

Use o método dos mínimos quadrados e uma linearização nos parâmetros para obter uma aproximação da função f tabelada por uma função racional do tipo

$$g(x) = \frac{a + x^2}{b + x}.$$

Exercício 2. (3 pontos) Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_{-2}^2 f(x)dx$ dividimos $[-2, 2]$ em quatro subintervalos de mesmo tamanho e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio de grau menor ou igual a 2 que interpola f nos pontos interiores $-1, 0$ e 1 .

1. Determine, pelo método de diferenças divididas, o polinômio p que interpola f nestes 3 pontos (observação: os coeficientes do polinômio p dependem da função f).
2. Calcule uma aproximação da integral de p no intervalo $[-2, 2]$ usando a fórmula de Simpson simples, de maneira a obter uma fórmula de integração para $\int_{-2}^2 f(x)dx$. Depois integre p exatamente no intervalo $[-2, 2]$ e compare a fórmula obtida com a fórmula usando Simpson. Como explicar este resultado?
3. Use a fórmula obtida para calcular uma aproximação de $\int_0^1 \ln(x) dx$ (observação: \ln denote o logaritmo natural). Calcule o erro cometido nesta aproximação, usando o valor exato desta integral (observação: a primitiva de $\ln(x)$ é $x \ln(x) - x$)

Exercício 3. (2.5 pontos) Consideramos a função

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{para } x \in [-1, 0]; \\ ax^2 + bx + c & \text{para } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Determine os valores de $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ de modo que $s \in C^1([-1, 1])$, s interpola $f(x) = e^x$ nos pontos $-1, 0, 1$, e satisfaz também $s'(0) = f'(0)$. Calcule uma aproximação de $J = \int_{-1}^1 e^x dx$ usando $s(x)$, e calcule o erro de aproximação correspondente (usando 4 algarismos).

Exercício 4. (2.5 pontos) Quatro postos de pedágio se encontram ao longo de uma estrada reta. Através de hodômetros de veículos obteve-se alguma informação aproximativa sobre a distância entre eles. Segundo estas medidas, a distância do primeiro ao último é de 89 km, do primeiro ao terceiro de 67 km, do segundo ao último de 53 km, do primeiro ao segundo de 35 km e do terceiro ao quarto de 20 km. Deseja-se determinar as distâncias entre os postos. Escreva o sistema linear sobre-determinado para determinação destas distâncias, considerando as medidas **na ordem apresentada acima**. Resolva então o sistema normal usando o método de eliminação de Gauss.