Sistemas Lineares e Método da eliminação de Gauss

MAP 2110 - Diurno

IME USP

23 de abril

Sistemas lineares

Um sistema linear, é um conjunto de equações nas variáveis $x_1, \dots x_n$ que devem ser resolvidas simultaneamente na forma:

Sistema Linear

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

Os números a_{ij} são chamados coeficientes do sistema linear.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\
0x_1 + x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Tem uma única solução $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$ Problema: como resolver um sistema linear qualquer?

quantidade de incógnitas e equações

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
E_1	$a_{11}x_1$	$+a_{12}x_2$	$\cdots$	$+a_{1n}x_n$	b_1
E_2	$a_{21}x_1$	$+a_{22}x_2$	$\cdots$	$+a_{2n}x_n$	b_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
E_m	$a_{m1}x_1$	$+a_{m2}x_2$	$\cdots$	$+a_{mn}x_n$	b_m

De forma geral a quantidade de incógnitas pode ser diferente do número de equações ($m \neq n$). O que pode afetar a quantidade de soluções e a existência delas. Nós vamos primeiro analisar o caso em que o número de equações e incógnitas são o mesmo, digamos n.

Classe de sistemas simples de resolver

Embora a resolução dos sistemas lineares envolvam montes de contas, em geral. Existem uma classe de sistemas que mais simples de resolver. Por exemplo:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & = & 3 \\ & 2x_2+ & x_3 & = & 1 \\ & & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Sistemas Triangulares Superiores

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2+ & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Estes sistemas conseguimos resolver se todos os a_{nn} forem diferentes de zero. basta usar a fórmula

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}(b_k - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i)$$

começando com $k = n$ e voltanto até 1. Um procedimento chamado de Backward Substituition

Num sistema linear

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
E_1	$a_{11}x_1$	$+a_{12}x_2$	$\cdots$	$+a_{1n}x_n$	b_1
E_2	$a_{21}x_1$	$+a_{22}x_2$	$\cdots$	$+a_{2n}x_n$	b_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
E_m	$a_{m1}x_1$	$+a_{m2}x_2$	$\cdots$	$+a_{mn}x_n$	b_m

Podemos fazer algumas operações nas equações E_i de forma que não alteramos o conjunto solução do sistema.

Num sistema linear

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
E_1	$a_{11}x_1$	$+a_{12}x_2$	$\cdots$	$+a_{1n}x_n$	b_1
E_2	$a_{21}x_1$	$+a_{22}x_2$	$\cdots$	$+a_{2n}x_n$	b_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
E_m	$a_{m1}x_1$	$+a_{m2}x_2$	$\cdots$	$+a_{mn}x_n$	b_m

Podemos fazer algumas operações nas equações E_i de forma que não alteramos o conjunto solução do sistema.

Destacaremos aqui três destas operações que chamaremos de **Operações Elementares**

- Troca das linhas da equação que denotaremos por $E(i, j)$
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero $(E(i; \alpha))$
- Somar a uma equação o múltiplo de uma outra equação.

Exemplo

Troca de linhas

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \end{array} \; (E(1,2)) \rightarrow \; \begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array}$$

Multiplicar linha por escalar

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ x_1 & +1.5x_2 & +0.5x_3 & = & 1.5 \end{array}$$

Somar uma linha com múltiplo de outra

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ x_1 & +1.5x_2 & +0.5x_3 & = & 1.5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ & 3.5x_2 & +2.5x_3 & = & 2.5 \end{array}$$

Será que usando as operações elementares sempre conseguiremos deixar um sistema linear na forma triangular superior? Vamos começar com um exemplo:

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -6$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 38$$
$$5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 14$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_3 - x_4 &= -6 \\
x_2 - 0.5x_3 + 1.5x_4 &= 9 \\
2x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 &= 35 \\
2x_2 + 7.5x_3 + 3.5x_4 &= 29
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
2x_1 + x_3 - x_4 = -6 \\
x_2 - 0.5x_3 + 1.5x_4 = 9 \\
4.5x_3 + 2.5x_4 = 17 \\
8.5x_3 + 0.5x_4 = 11
\end{gathered}
$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -6$$
$$x_2 - 0.5x_3 + 1.5x_4 = 9$$
$$4.5x_3 + 2.5x_4 = 17$$
$$\frac{-38}{9}x_4 = \frac{-190}{9}$$

Matrizes do sistema linear

Note que as operações elementares alteram os coeficientes do sistema linear, assim como os elementos do lado direito da igualdade. Assim executar as operações elementares nas equações do sistema linear é equivalente e realizar as operações elementares nas linhas da **matriz do sistema linear**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exemplo

Para o sistema anterior teríamos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 6 & 38 \\ 5 & 2 & 10 & 1 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1.5 & 9 \\ 0 & 2 & 3.5 & 5.5 & 35 \\ 0 & 2 & 7.5 & 3.5 & 29 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1.5 & 9 \\ 0 & 0 & 4.5 & 2.5 & 17 \\ 0 & 0 & 8.5 & 0.5 & 11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1.5 & 9 \\ 0 & 0 & 4.5 & 2.5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -38/9 & -190/9 \end{array}\right]$$