Orientações Prática 3 - Movimento Unidimensional

Determinar a aceleração da gravidade por meio de dois sistemas, pêndulo simples e plano inclinado, usando o método de mínimos quadrados.

Pêndulo simples

Coleta dos dados (T e L) mantendo-se o resto dos parâmetros invariáveis. O comprimento L foi medido entre o ponto de suspenção e o centro de massa do corpo. O ângulo de inclinação usado para a coleta dos dados foi θ = 12,5°.

$T = \frac{t}{10}$ e calculando os valores de T^2 e suas respectivas incertezas, temos:

Tabela 1. Dados coletados e calculados.

L **(± 0,05 cm)**	***t*** **(+ 0,03 s)**	***T*** **(± 0,003 s)**	$\boldsymbol{T^2}$ **(s)**
297,0	34,58	3,458	11,96 ± 0,02
250,0	31,67	3,167	10,03 ± 0,02
191,4	27,79	2,779	7,72 ± 0,02
148,9	24,42	2,442	5,96 ± 0,01
129,9	23,08	2,308	5,33 ± 0,01
97,3	19,64	1,964	3,86 ± 0,01

De acordo com os dados obtidos na tabela acima foi montado o gráfico de T^2 versus L abaixo.

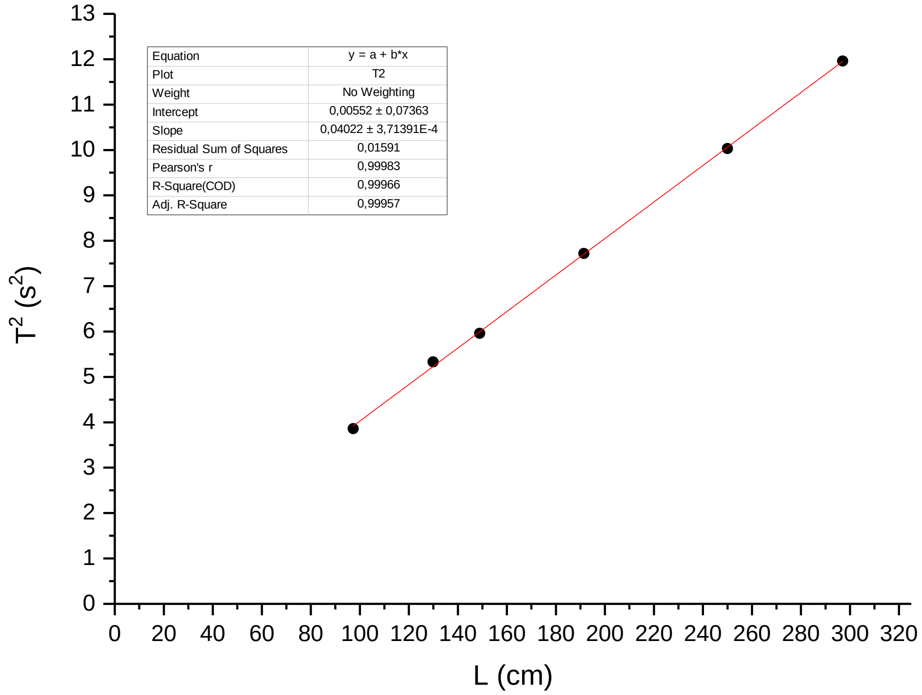


Figura 1. Gráfico de T^2 versus L.

Calcular o coeficiente angular da reta usando o método de mínimos quadrados (que considera a soma dos quadrados das distâncias, *S*):

$$S = \sum_{i=1}^{N}(y_{c_i} - y_i)^2$$

e no processo de minimização de *S*, como função dos parâmetros da reta, fornece as seguintes expressões

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})y_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{e} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

onde $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$, a dispersão média do ajuste $\Delta y = \sqrt{\frac{\sum(ax_i + b - y_i)^2}{N-2}}$, incerteza no coeficiente angular $\Delta a = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$, e incerteza do coeficiente linear $\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N\sum(x_i - \bar{x})^2}}\Delta y$.

De posse dos dados da Tabela 1 podemos gerar novos dados conforme as fórmulas apresentadas acima (Tabela 2):

Tabela 2. Cálculos relacionados ao método dos mínimos quadrados.

	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(ax_i + b - y_i)^2$	$(x_i)^2$	y_{ci}	$(y_{ci} - y_i)^2$
x_i => L_i	12376,56	1330,55	7,54889E-05	88209,00	11,95131	0,0000755
y_i => T^2_i	4128,06	644,43	0,000954797	62500,00	10,0609	0,0009548
N=6	31,92	43,62	0,000258621	36633,96	7,703918	0,0002586
$\bar{x}$ =185,75	1357,92	-219,63	0,001190484	22171,21	5,994503	0,0011905
$\bar{y}$ =7,48	3119,22	-297,68	0,009941212	16874,01	5,230294	0,0099412
	7823,40	-341,42	0,003489571	9467,29	3,919073	0,0034896
Soma	28837,10	1159,87	0,015910173	235855,47	44,860	0,01591

portanto,

a = 4,02 s^2/m e Δa = 0,04 s^2/m

Δy = 0,06 s

b = 0,01 s^2 e Δb = 0,07 s^2

S = 0,02 s^4

Considerando a melhor reta média e suas variações Δy, temos o gráfico da figura 2:

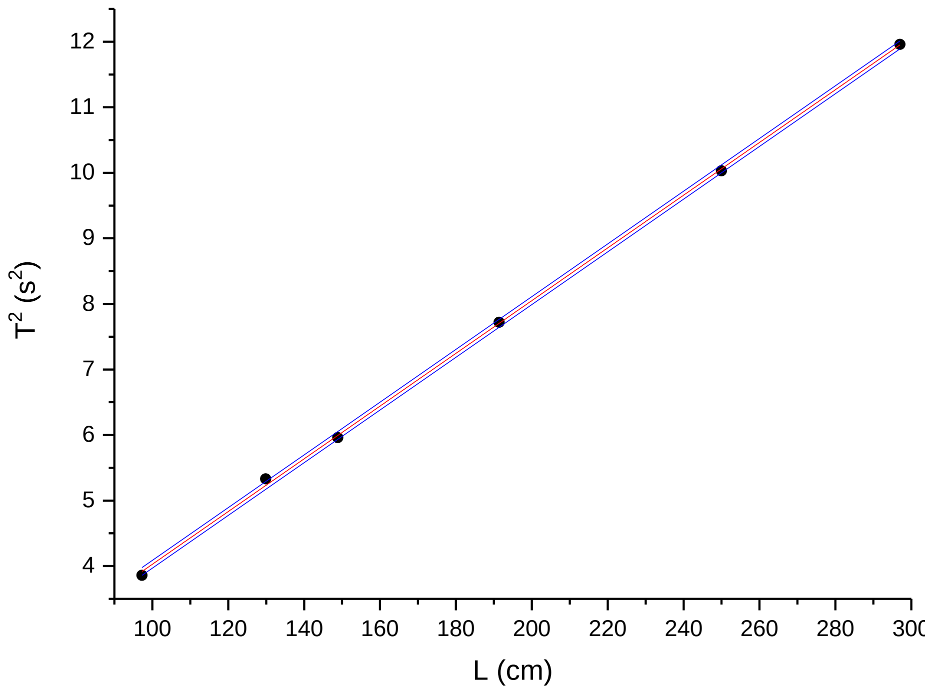


Figura 2. Gráfico de T^2 versus L com suas respectivas retas de erro (Δy).

A relação linear entre o período T e o comprimento L para o caso do pêndulo simples é:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} L$$

que comparando com o gráfico T^2 vs L

$$\frac{(2\pi)^2}{g} = coeficiente\ angular = a \quad \rightarrow \quad g = \frac{(2\pi)^2}{a}$$

$$g = 9{,}8148 \pm 0{,}39 = 9{,}8 \pm 0{,}4\ m/s^2$$

Sabendo-se que o valor teórico de g no equador é 9,789 m/s^2 e nos pólos é 9,823 m/s^2, a média seria g_m = 9,806 m/s^2 que ao confrontar com o resultado experimental está em bom acordo.

Plano inclinado

Determinar o ângulo θ de inclinação com seu respectivo erro através da medida do comprimento e da altura de desnível do trilho.

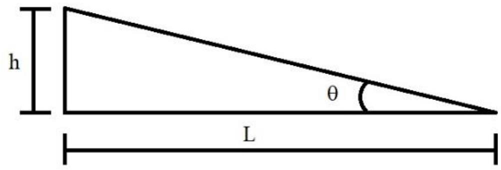


Figura 3. Esquema do trilho inclinado.

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \qquad \rightarrow \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{L}\right)$$

onde h = 79,00 $\pm$ 0,05 cm e L = 3810,00 $\pm$ 0,05 cm e, portanto,

$$\theta = 1{,}18811 \pm 0{,}00002\ °$$

Construir uma tabela de tempo e posição y (tabela 3) sabendo-se o intervalo de tempo entre as marcas de posição da fita (figura 4).

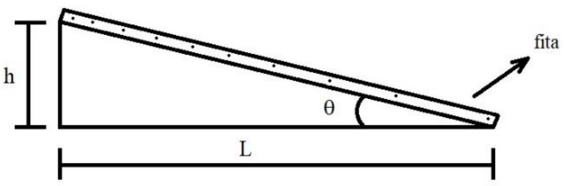
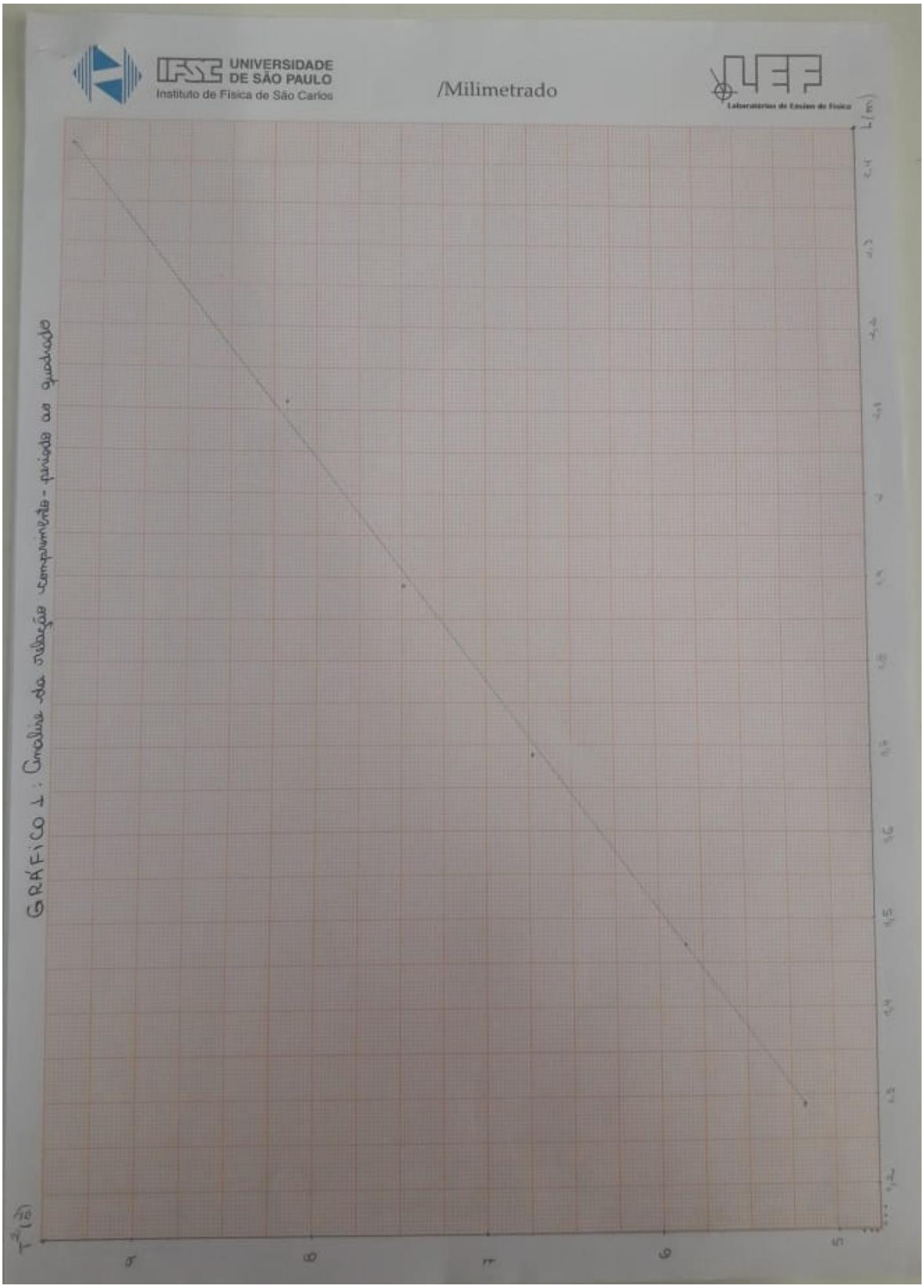


Figura 4

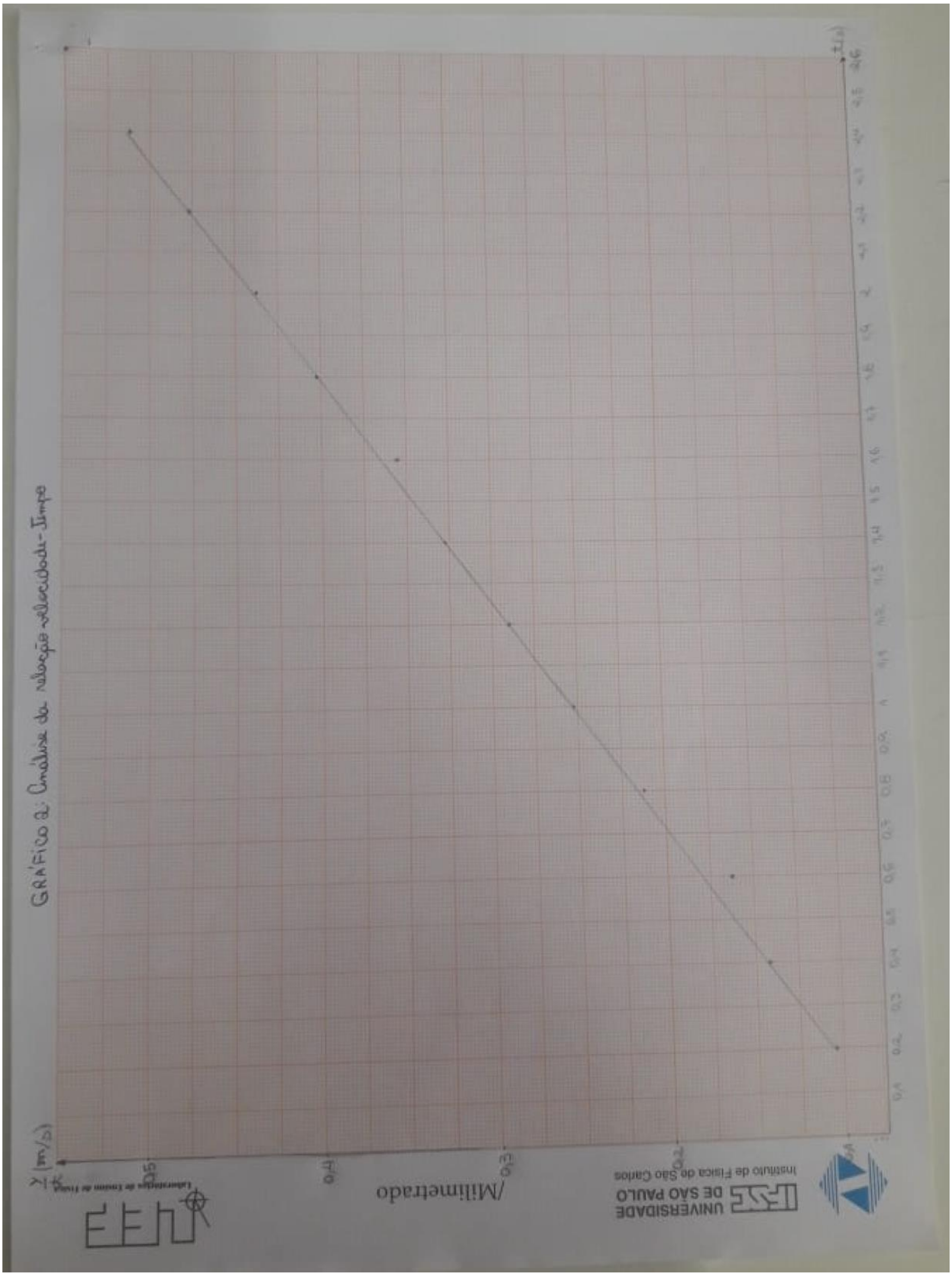
Tabela 3. Dados coletados no ensaio de plano inclinado.

Tempo (± 0,05 s)	Posição *y* (± 0,0005 cm)	y/t (m/s)	
0,00	0,00	0,00	
0,20	2,50	1250	
0,40	12,90	32,25	
0,60	30,50	50,8333	
0,80	58,50	73,125	
1,00	93,50	93,50	
1,20	136,00	113,33333	
1,40	186,00	132,85714	
1,60	245,00	153,125	
1,80	312,50	173,6111111	
2,00	387,50	193,75	
2,20	470,50	213,86363636	
2,40	561,00	233,75	
2,60	660,50	254,0384615	

Exemplo de gráfico de T^2 em função de L

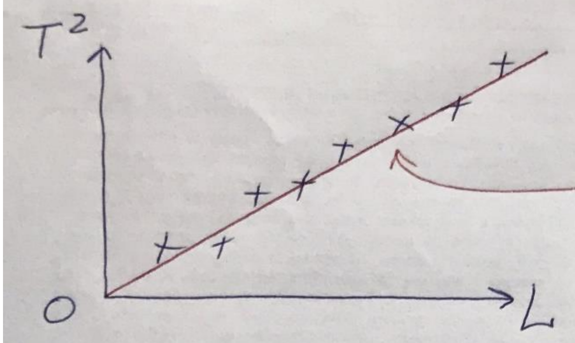


Exemplo de gráfico de *y/t* em função de *t*



Anexo sobre propagação de erro

1) Pêndulo balístico



Coeficiente angular:

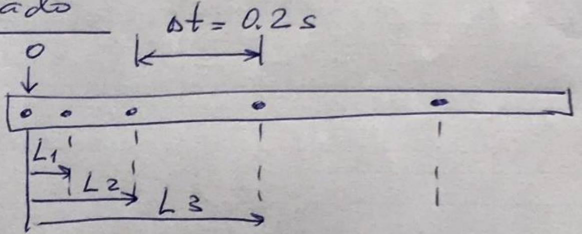
$$K = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (p.\ 49)$$

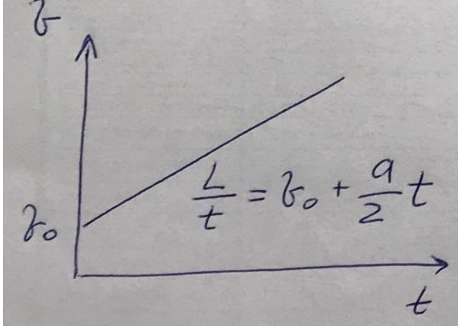
$$\Delta K = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (p.\ 50)$$

onde $x \to L$, $y \to T^2$

$$g = (2\pi)^2 \left[\frac{1}{K} \pm \frac{\Delta K}{K^2} \right] = \boxed{g \pm \Delta g}$$

2) Plano inclinado





$$\boxed{y(x) = b + KX}$$

onde $y = \frac{L}{t} = v$, $x = t$, $K = \frac{a}{2}$

$a = g \operatorname{sen} \theta$

$$g = \frac{2K}{\operatorname{sen} \theta} \pm \Delta g$$

→ Determinar K e ΔK usando o método dos mínimos quadrados!

$$\Delta g = 2 \cdot \frac{\Delta K \cdot \operatorname{sen} \theta + \Delta(\operatorname{sen} \theta) \cdot K}{(\operatorname{sen} \theta)^2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{h}{L}$$

$$\Delta(\operatorname{sen} \theta) = \frac{L \Delta h + \Delta L \cdot h}{L^2}$$

$$\boxed{g = g \pm \Delta g}$$