LOM3203 – Controle e Automação
AULA 4

Prof. Dr. Emerson G. Melo

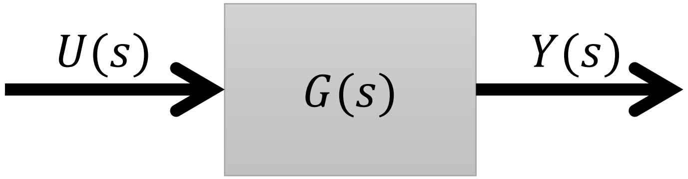
Sumário

- Erro em Regime;
- Lugar Geométrico das Raízes.

Erro em Regime

❑Controle em Malha Aberta x Controle em Malha Fechada.

Malha Aberta

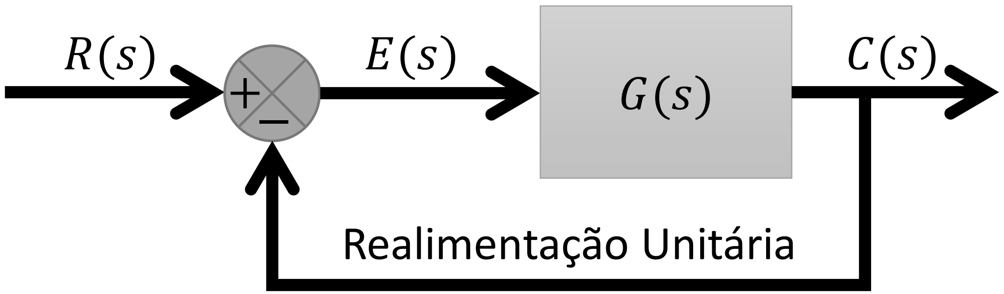


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Função de Transferência de Malha Aberta

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Malha Fechada



$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) - C(s)]$$

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)C(s)$$

$$C(s) + G(s)C(s) = G(s)R(s)$$

$$C(s)[1 + G(s)] = G(s)R(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

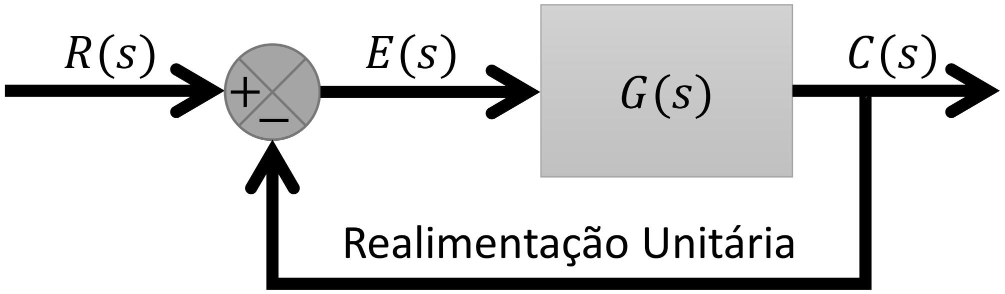
Função de Transferência de Malha Fechada

$$C(s) = T(s)R(s)$$

Erro em Regime

❑Erro estacionário.

Malha Fechada



$$C(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = R(s)\left[1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)}\right]$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1 - \frac{1 + G(s) - G(s)}{1 + G(s)}$$

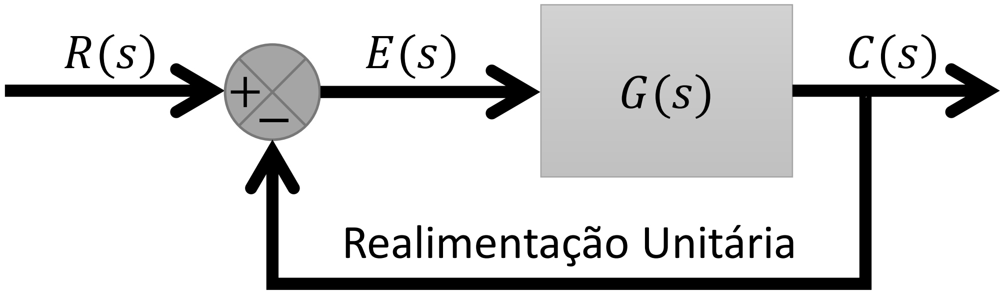
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Erro em Regime

Erro estacionário.

Malha Fechada



$$C(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)}$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Pelo teorema do valor final:

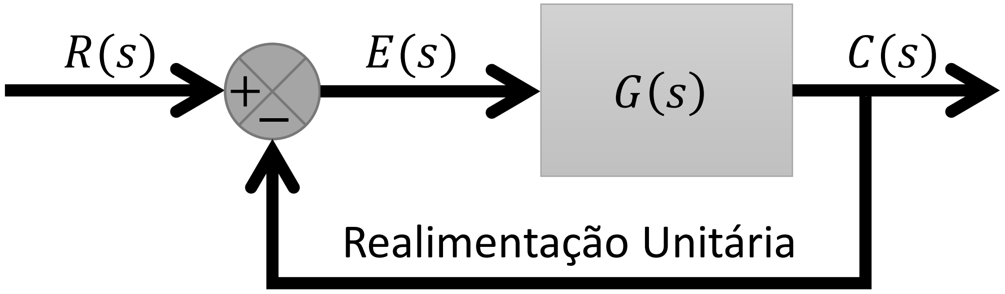
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Erro estacionário

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$$

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Exemplo: Ganho Unitário



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

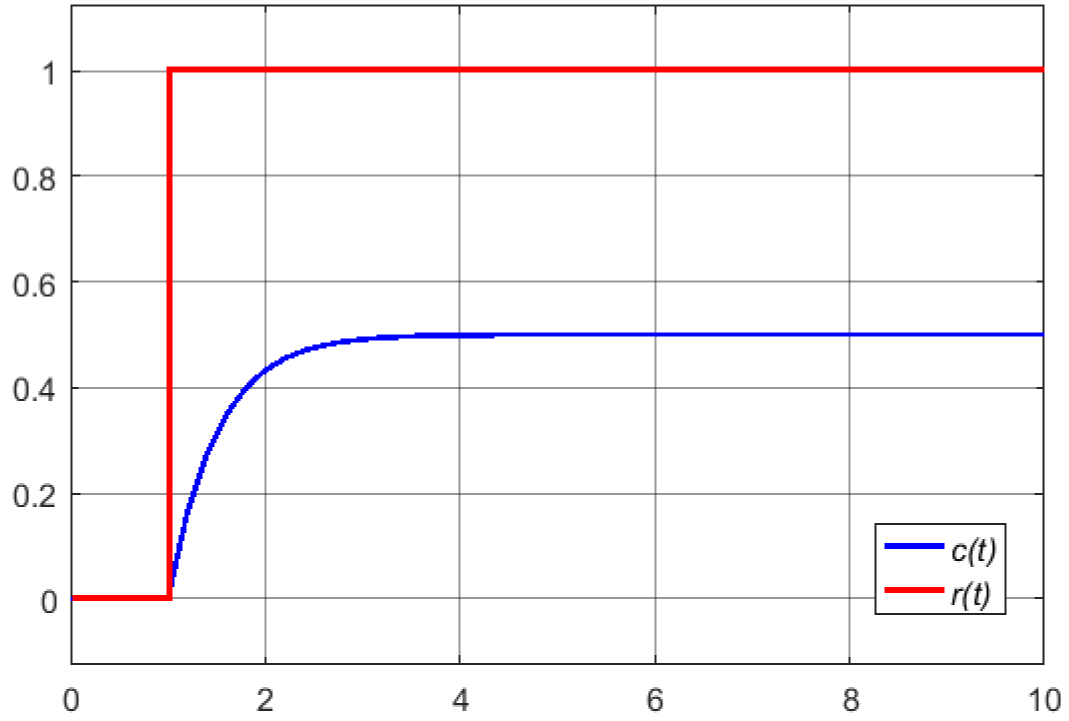
Erro estacionário

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s}$$

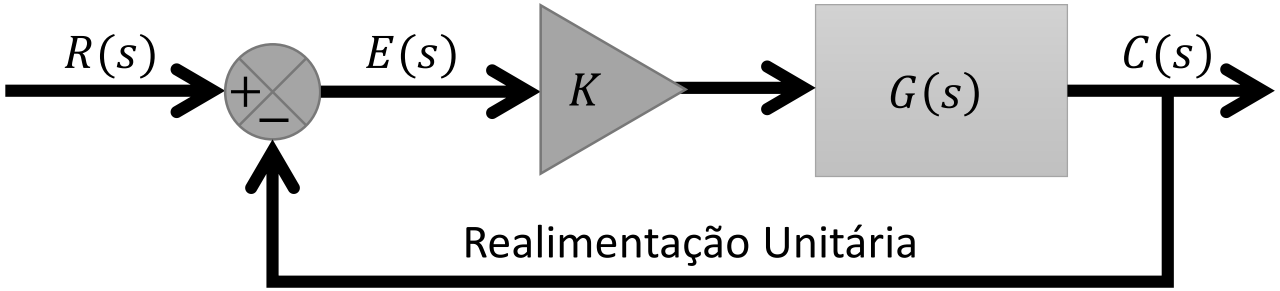
$$G(0) = \frac{1}{0+1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$



Erro em Regime

❑A utilização de controle proporcional possibilita diminuir o erro estacionário!!!



$$C(s) = G(s)KE(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = KG(s)[R(s) - C(s)]$$

$$C(s) = KG(s)R(s) - KG(s)C(s)$$

$$C(s) + KG(s)C(s) = KG(s)R(s)$$

$$C(s)[1 + KG(s)] = KG(s)R(s)$$

$$C(s) = \frac{KG(s)R(s)}{1 + KG(s)}$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{KG(s)R(s)}{1 + KG(s)}$$

$$E(s) = R(s)\left[1 - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}\right]$$

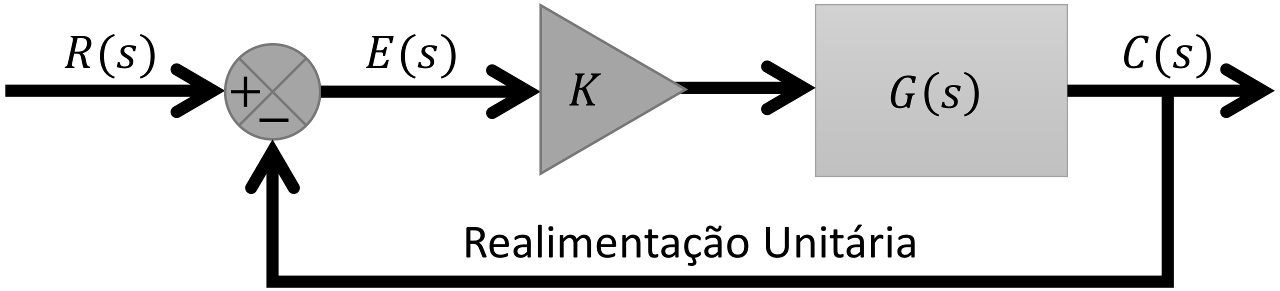
$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = 1 - \frac{1 + KG(s) - KG(s)}{1 + KG(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + KG(s)}R(s)$$

Erro em Regime

- A utilização de controle proporcional possibilita diminuir o erro estacionário!!!



$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Erro estacionário

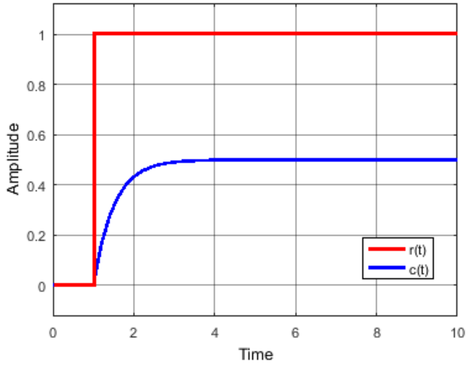
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KG(s)} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+KG(s)} \frac{1}{s}$$

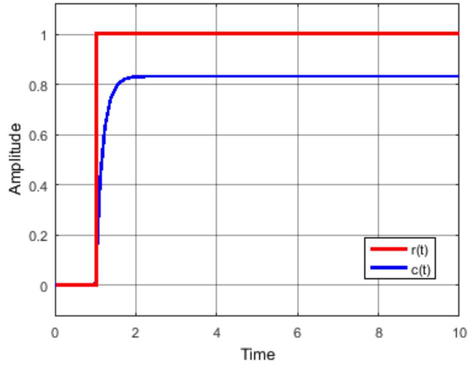
$$G(0) = \frac{1}{0+1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1+K}$$

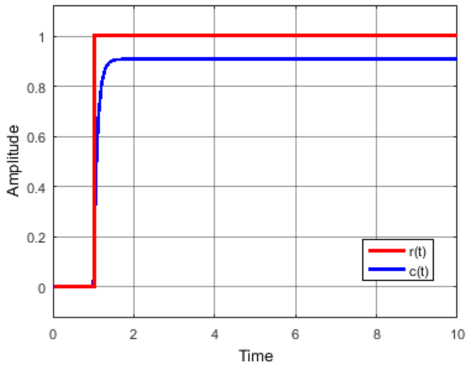
$K = 1; e_{ss} = 0{,}5$



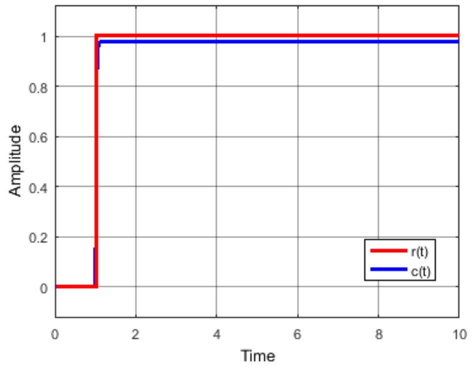
$K = 5; e_{ss} = 0{,}166$



$K = 10; e_{ss} = 0{,}09$

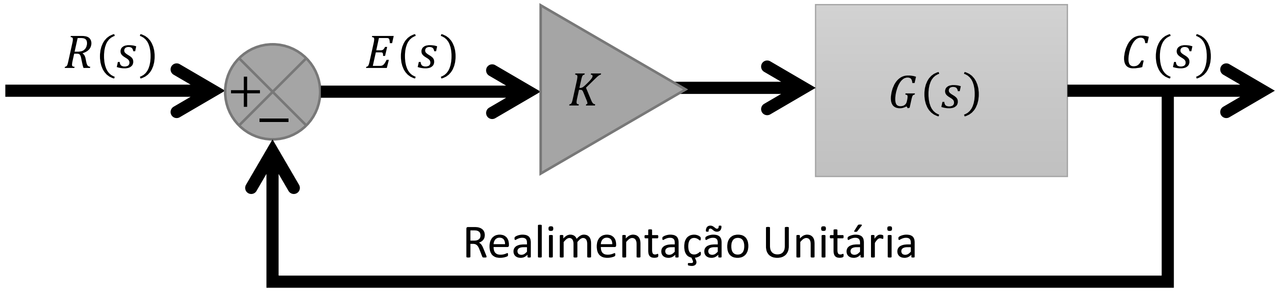


$K = 50; e_{ss} = 0{,}02$



Erro em Regime

O ganho não pode ser aumentado indefinidamente!!!



$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

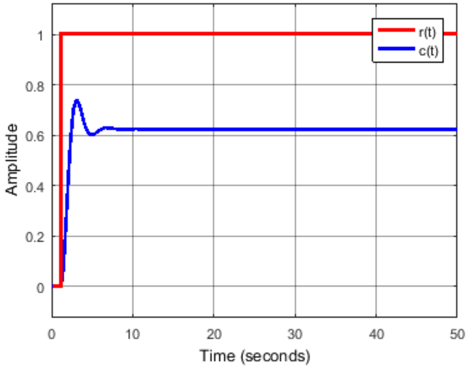
Erro estacionário

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + KG(s)} R(s)$$

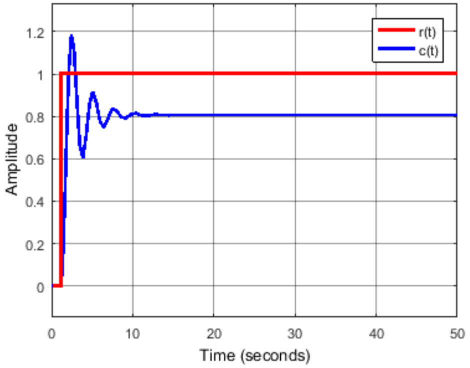
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + K(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)} \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + (1/6)K}$$

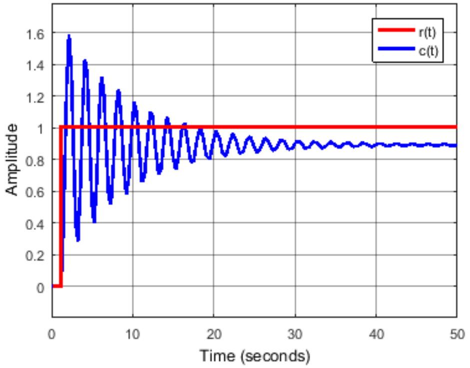
$K = 10; e_{ss} = 0{,}375$



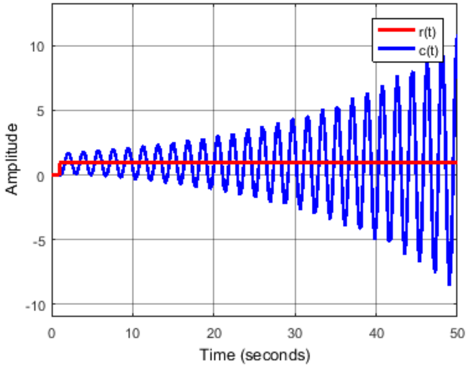
$K = 25; e_{ss} = 0{,}193$



$K = 50; e_{ss} = 0{,}107$



$K = 65; divergiu$



Lugar Geométrico das Raízes.

- Os polos da equação característica se movem na medida em que o ganho é alterado.
- O lugar geométrico das raízes permite que as raízes da equação característica sejam representadas graficamente para todos os valores de um parâmetro do sistema, como o ganho.
- Utilizando o método do lugar das raízes, o projetista pode prever quais os efeitos da variação do valor do ganho ou da adição de polos de malha aberta e/ou zeros de malha aberta sobre a localização dos polos de malha fechada.

Lugar Geométrico das Raízes.

- O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) ou "Root Locus" é o conjunto dos possíveis polos da função de transferência em malha fechada para valores de K variando de zero à infinito.

Função de Transferência de Malha Aberta

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s+1}}$$

Função de Transferência de Malha Fechada

$$\boxed{T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}}$$

Polos da equação característica:

$$T(s) = \frac{K\frac{1}{s+1}}{1+K\frac{1}{s+1}}$$

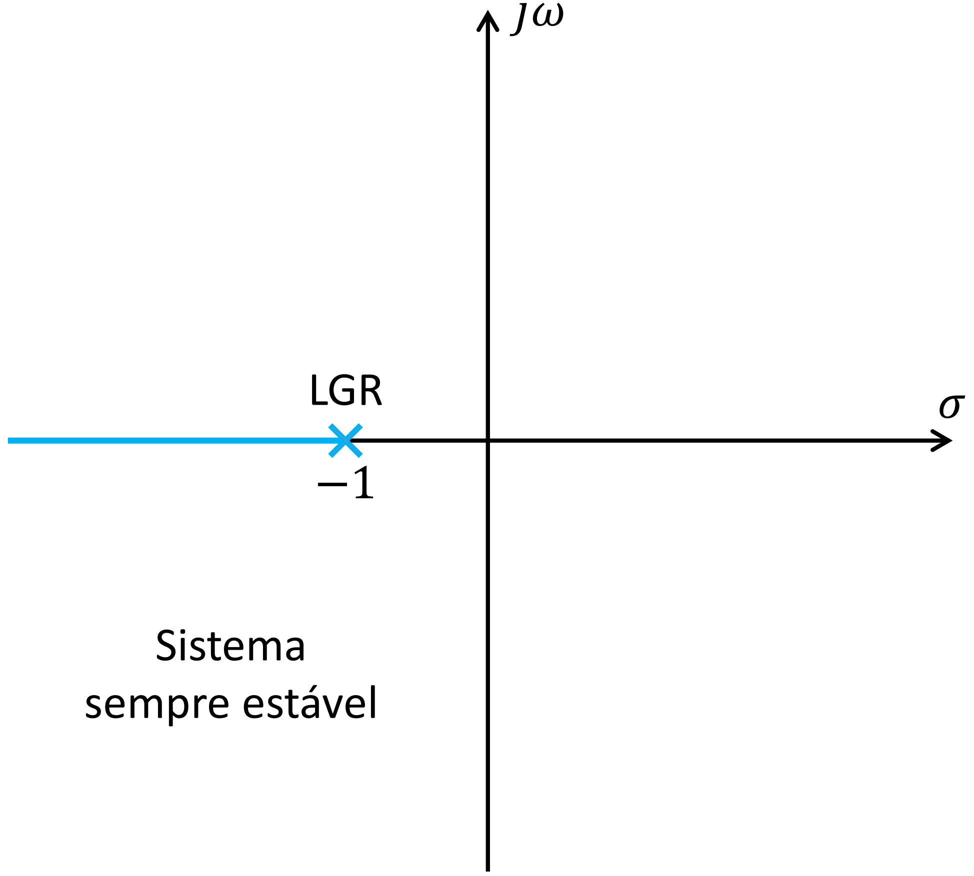
$$1 + K\frac{1}{s+1} = 0 \qquad \frac{1}{s+1} = \frac{-1}{K}$$

$$s + 1 = -K$$

$$\boxed{s = -K - 1}$$

$$K = 0 \qquad K = \rightarrow \infty$$

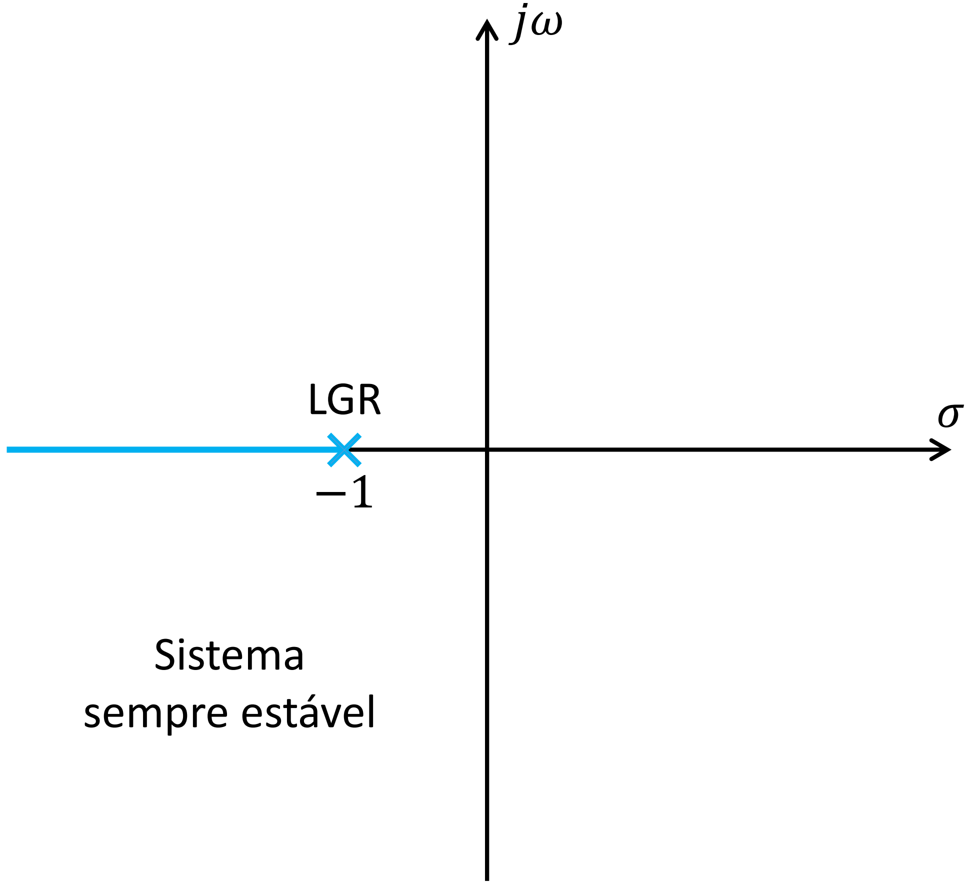
$$\boxed{s = -1} \qquad \boxed{s = -\infty}$$



Sistema sempre estável

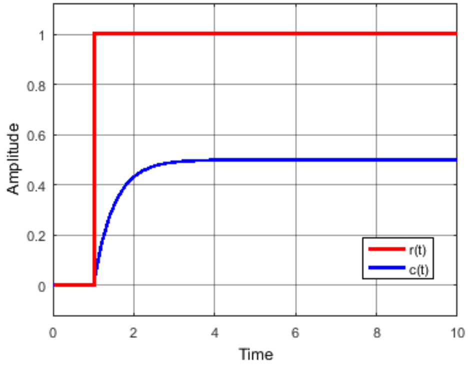
Lugar Geométrico das Raízes.

- O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) ou “Root Locus” é o conjunto dos possíveis polos da função de transferência em malha fechada para valores de K variando de zero à infinito.

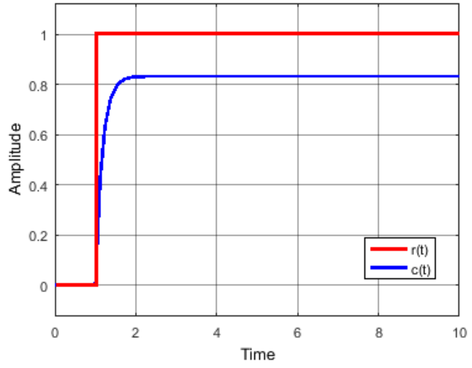


Sistema
sempre estável

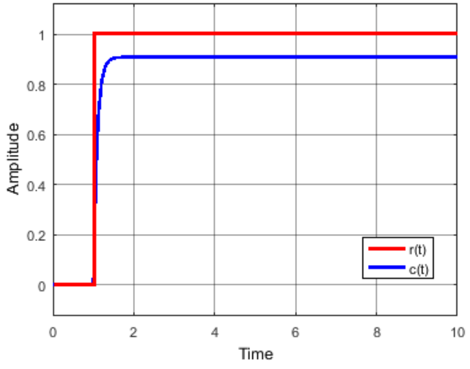
$K = 1; e_{ss} = 0{,}5$



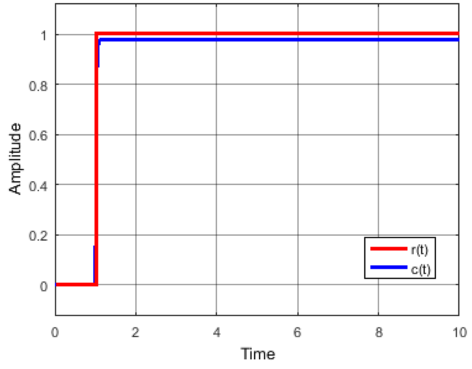
$K = 5; e_{ss} = 0{,}166$



$K = 10; e_{ss} = 0{,}09$



$K = 50; e_{ss} = 0{,}02$



Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Lugar Geométrico das Raízes.

- Existe uma série de regras que permitem esboçar graficamente o LGR referente a funções características com polinômios de qualquer ordem;

Função de Transferência de Malha Fechada

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

Polos da equação característica:

$$1 + KG(s) = 0$$

$$KG(s) = -1$$

Para que um valor de s seja um polo da equação característica é necessário atender:

Condição angular:

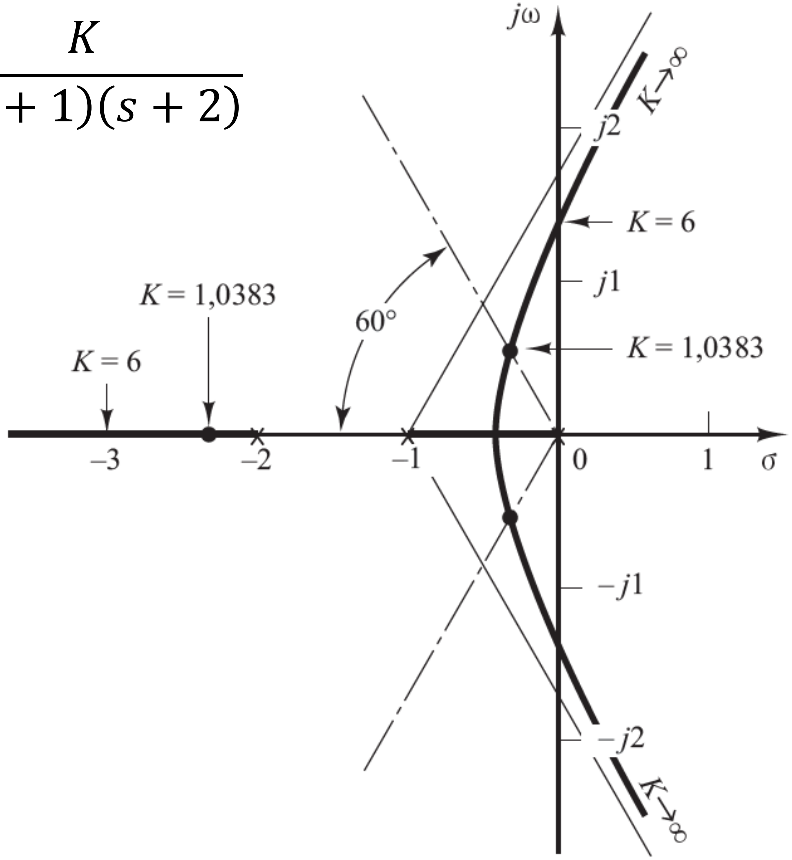
$$\angle KG(s) = \pm 180°(2l + 1)$$

$$l = 0,1,2,\cdots$$

Condição de módulo:

$$|KG(s)| = 1$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

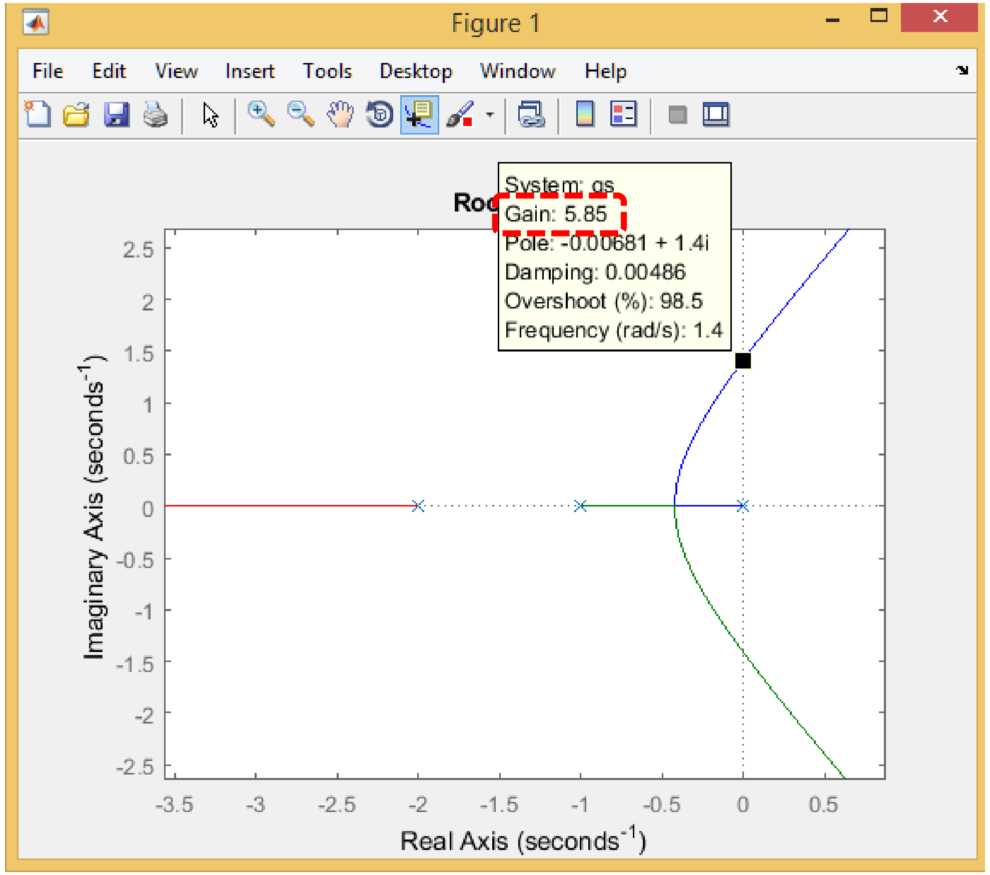


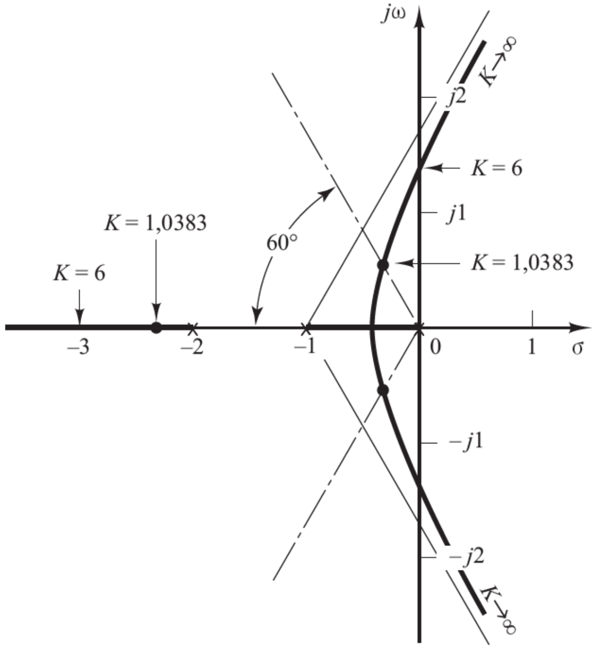
- É possível obter o LGR com o MATLAB;

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Command Window

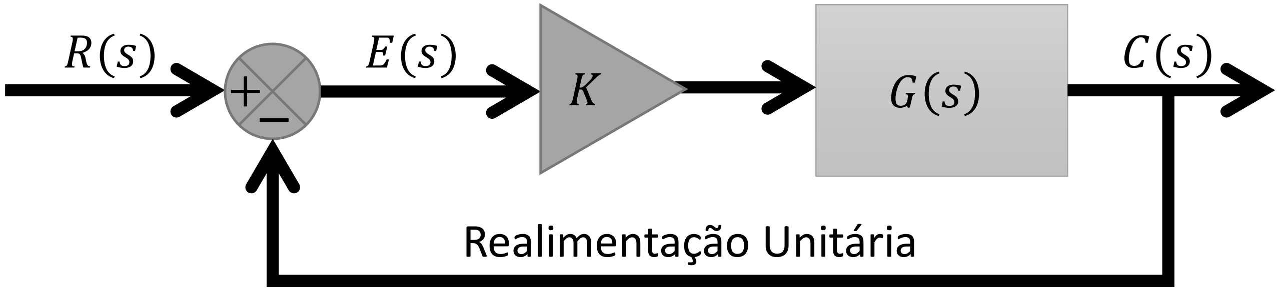
```
>> s = tf('s');
>> gs = 1/(s*(s + 1)*(s + 2))

gs =

          1
  -----------------
  s^3 + 3 s^2 + 2 s

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(gs)
>>
```





Lugar Geométrico das Raízes.

- Ajuste do ganho para atender a um critério específico de projeto. Exemplo: Obter o menor erro estacionário possível mantendo a estabilidade.

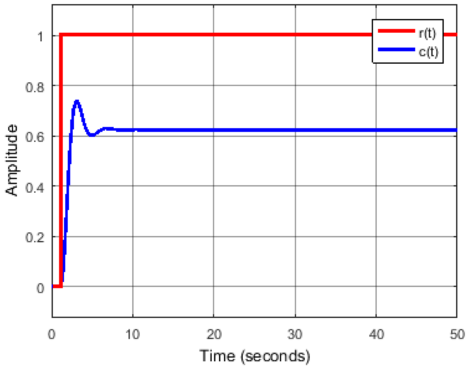


$$R(s) = \frac{1}{s}$$

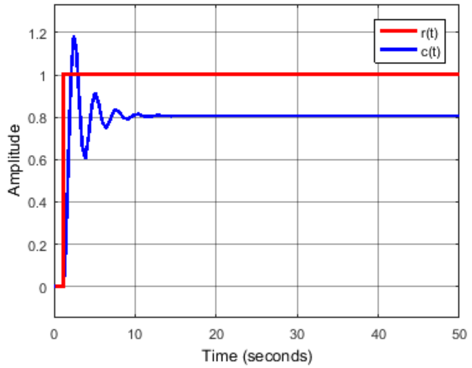
$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

O valor do ganho deve estar entre 50 e 65

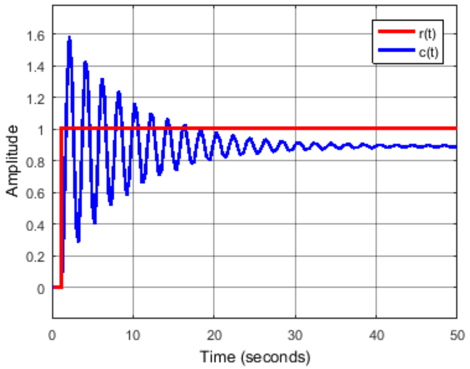
$K = 10; e_{ss} = 0{,}375$



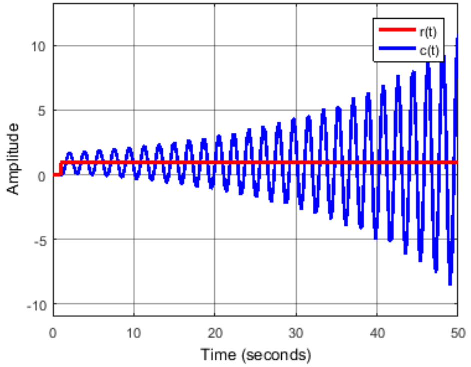
$K = 25; e_{ss} = 0{,}193$



$K = 50; e_{ss} = 0{,}107$

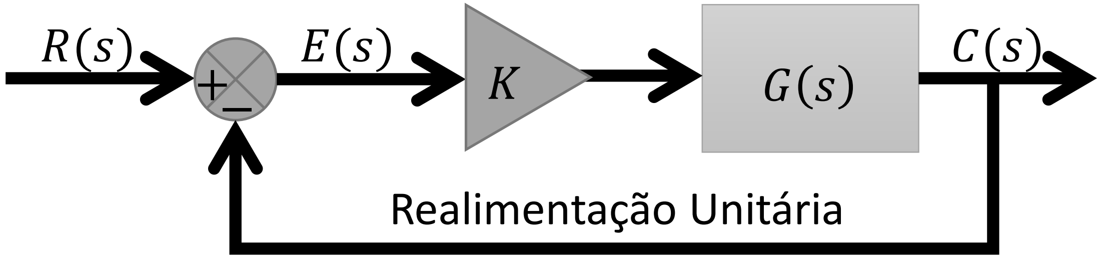


$K = 65; divergiu$



Lugar Geométrico das Raízes.

- Ajuste do ganho para atender a um critério específico de projeto. Exemplo: Obter o menor erro estacionário possível mantendo a estabilidade.

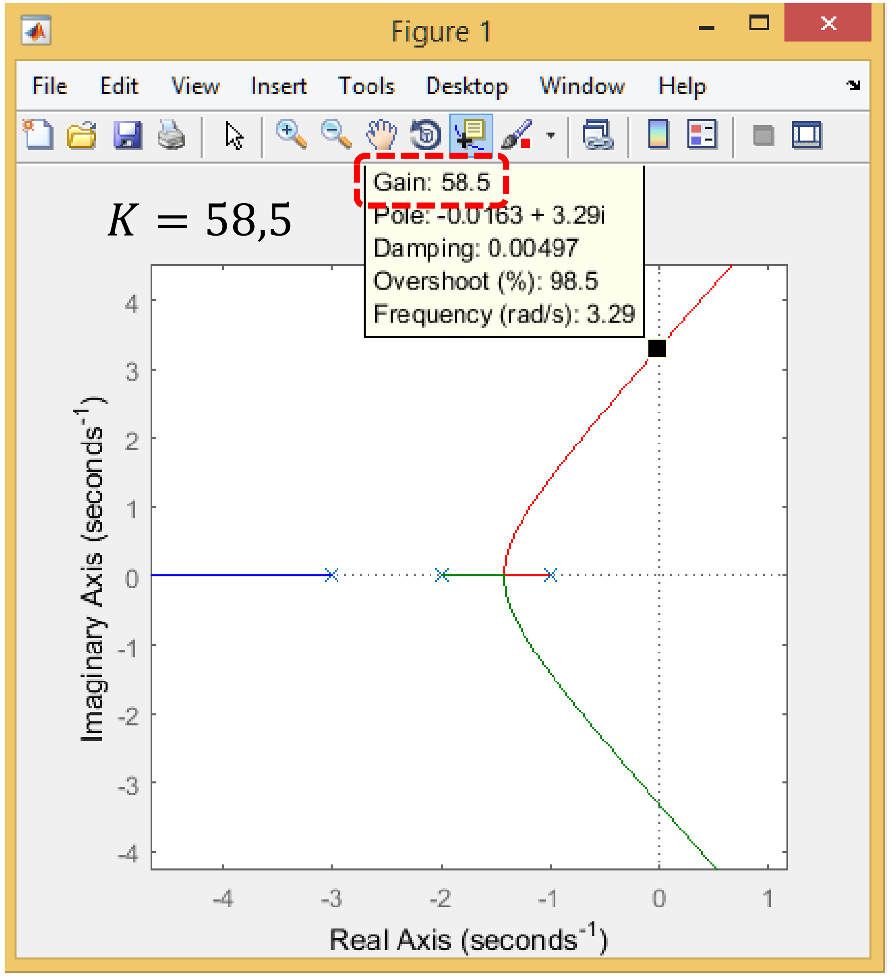


$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

Command Window

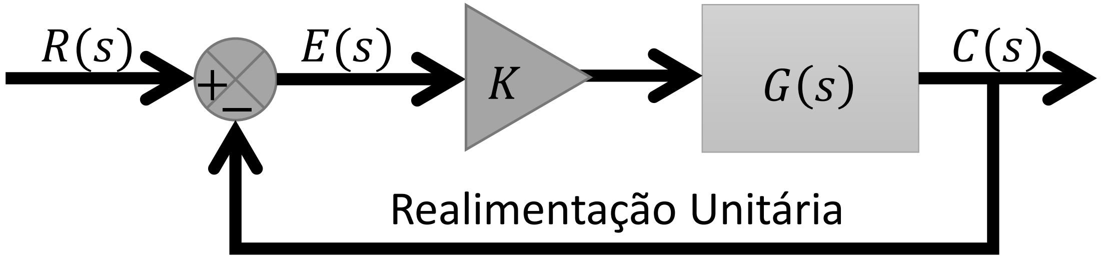
```
>> s = tf('s');
>> gs = 1/(s^3 + 6*s^2 + 11*s + 6)

gs =

            1
  ----------------------
  s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6

Continuous-time transfer function.

>> rlocus(gs)
>>
```

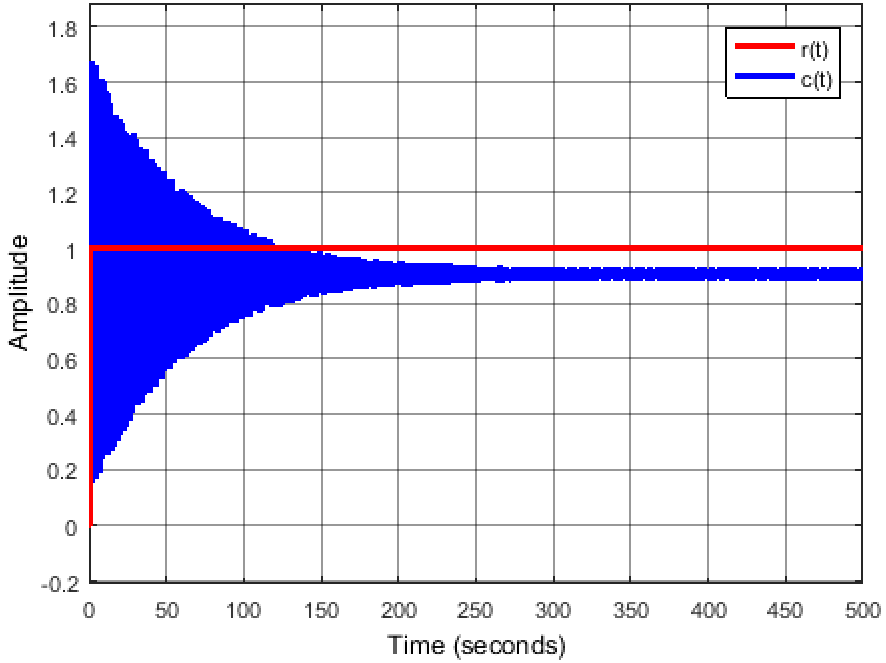


Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Lugar Geométrico das Raízes.

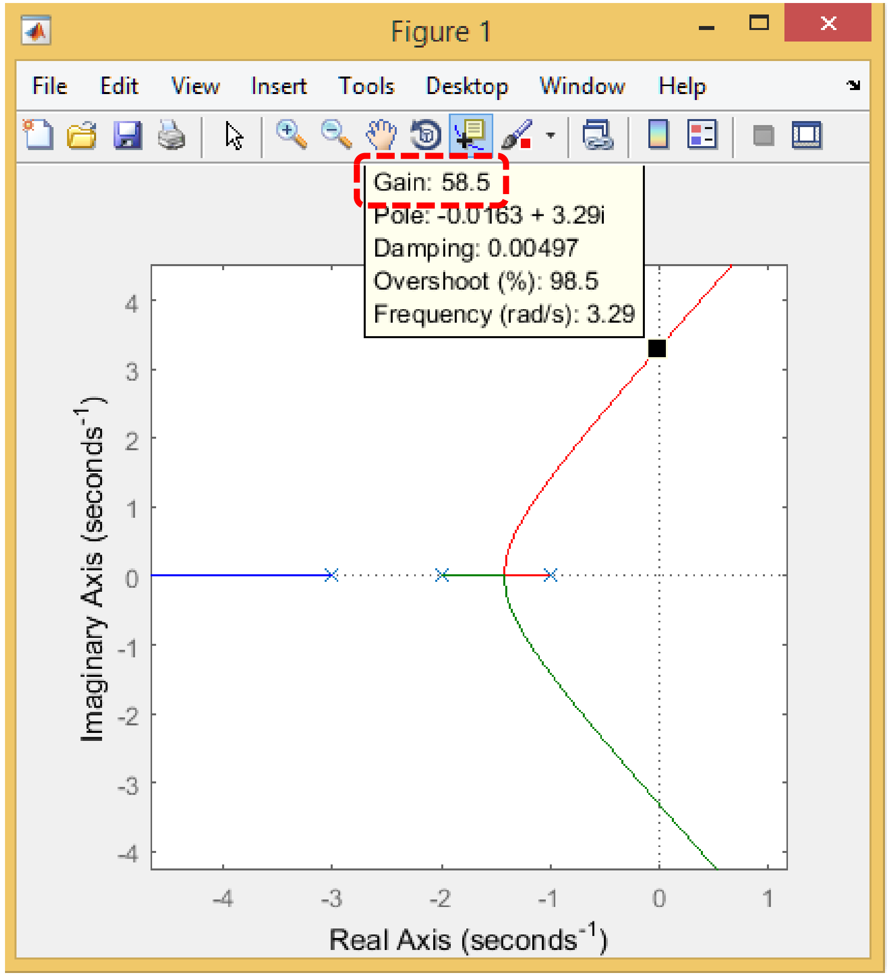
- Ajuste do ganho para atender a um critério específico de projeto. Exemplo: Obter o menor erro estacionário possível mantendo a estabilidade.





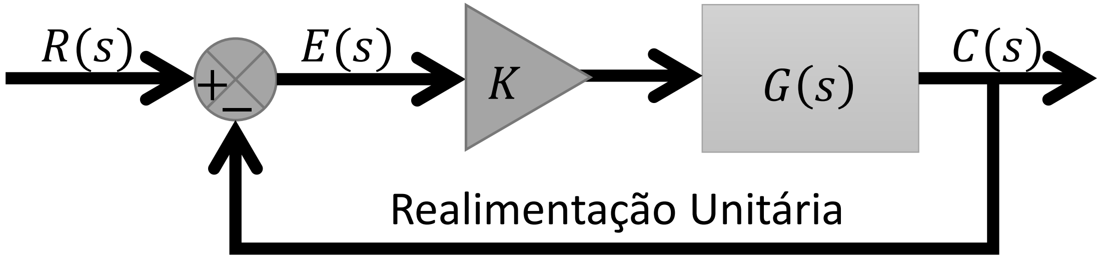
$$K = 58{,}5$$

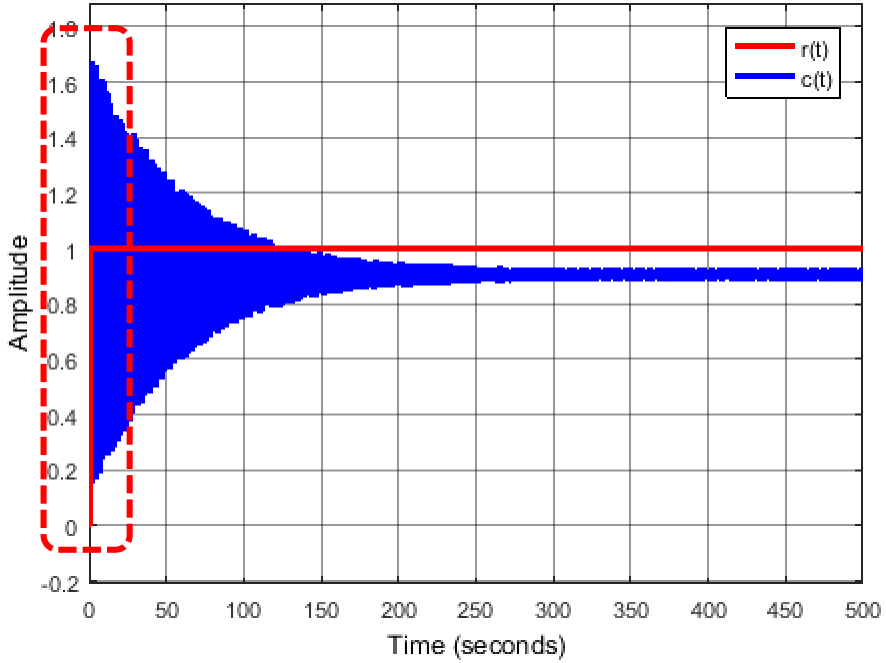
$$e_{ss} = 0{,}09$$



Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

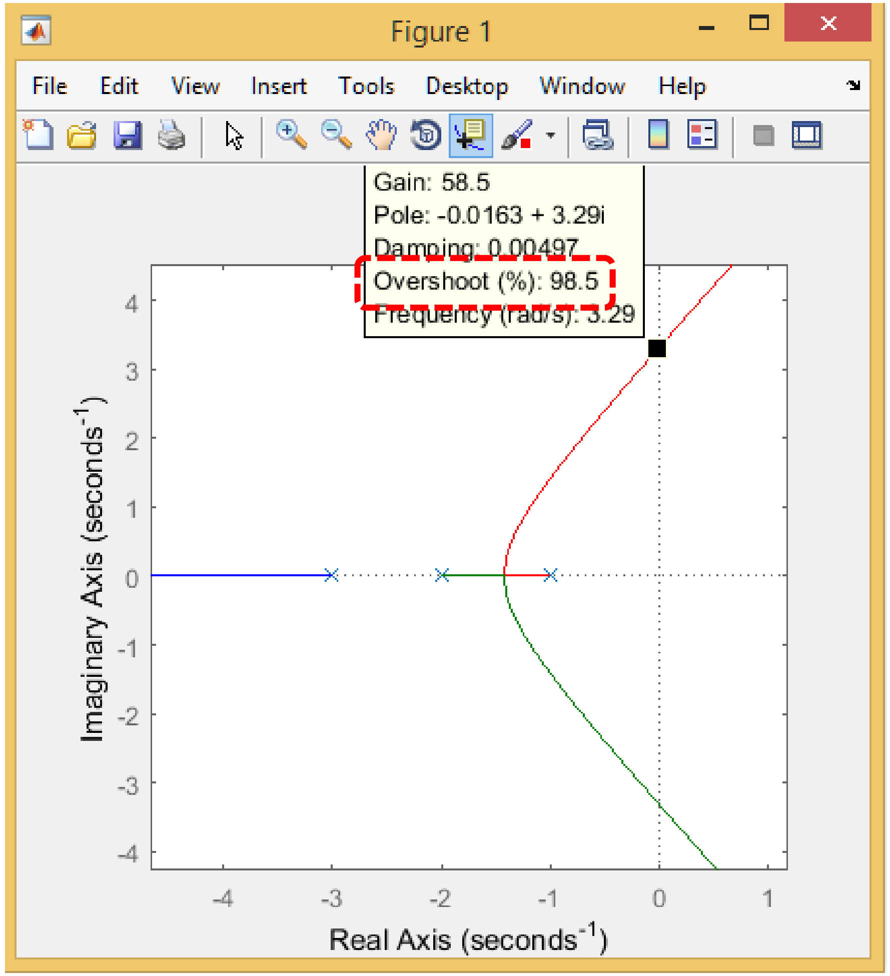
- Na maioria das vezes é necessário atender a outros requisitos como máximo Overshoot, ou mesmo reduzir ainda mais o erro estacionário.





$$K = 58{,}5$$

$$e_{ss} = 0{,}09$$



Referências Bibliográficas

- K. Ogata, “Engenharia de controle moderno”, 5 ed., São Paulo, Pearson Prentice Hall (2010).