LOM3203 – Controle e Automação
AULA 4

Prof. Dr. Emerson G. Melo

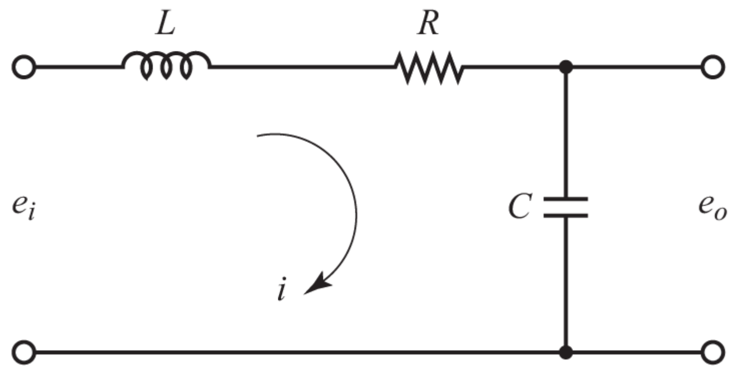
Sumário

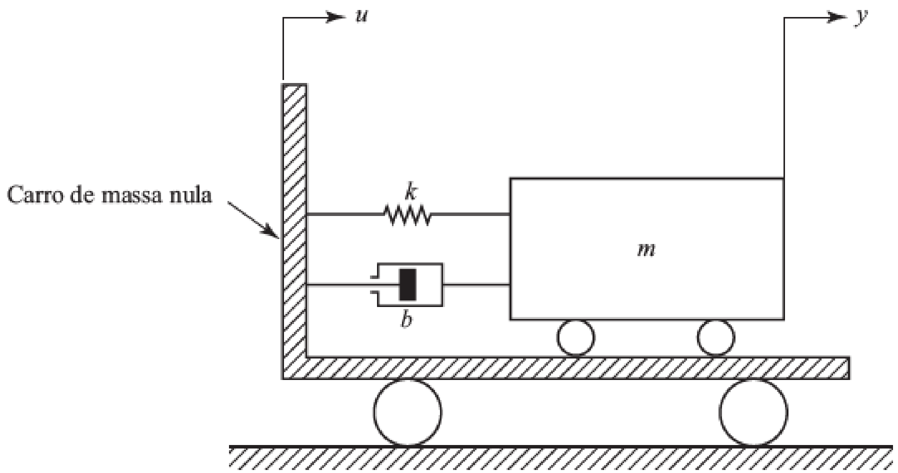
- Sistema;
- Estabilidade;
- Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz.

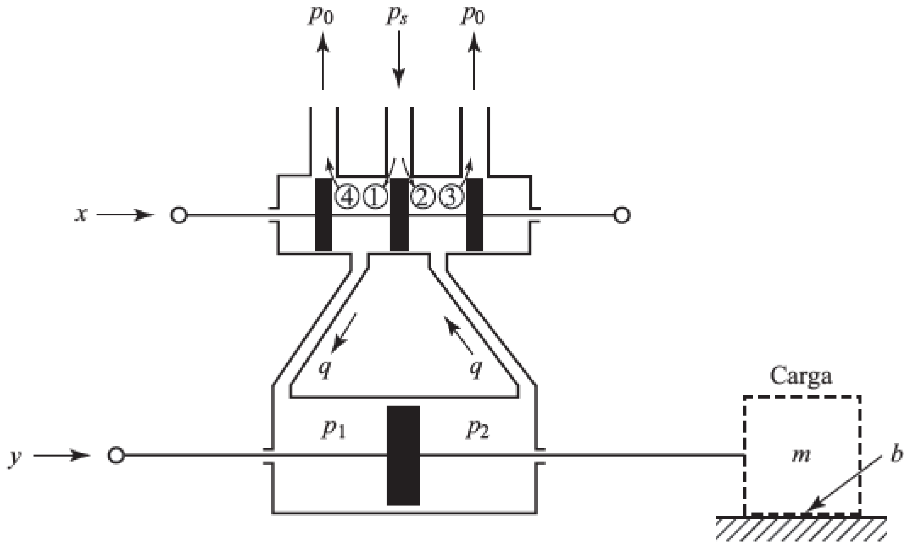
MATLAB

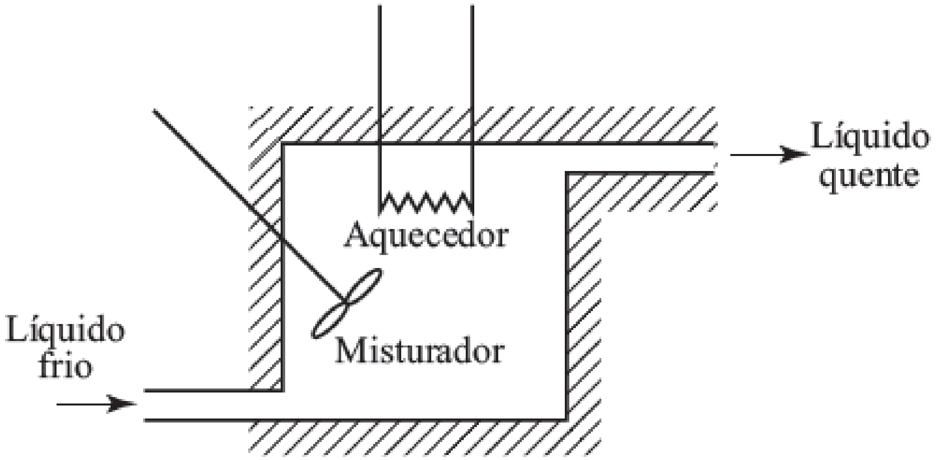
- Nessas duas aulas será utilizado o software MATLAB para analisar e projetar sistemas de controle.
- Uma licença de avaliação gratuita do MATLAB válida por 30 dias pode ser obtida em: https://www.mathworks.com/campaigns/products/trials.html
- Também é possível utilizar gratuitamente o MATLAB para Android e iOS.
- Softwares gratuitos também podem ser utilizados, como Scilab (https://www.scilab.org/) e Octave (https://www.gnu.org/software/octave/), ou Bibliotecas do Python (https://web.math.princeton.edu/~cwrowley/python-control/index.html).

❑Exemplos de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.

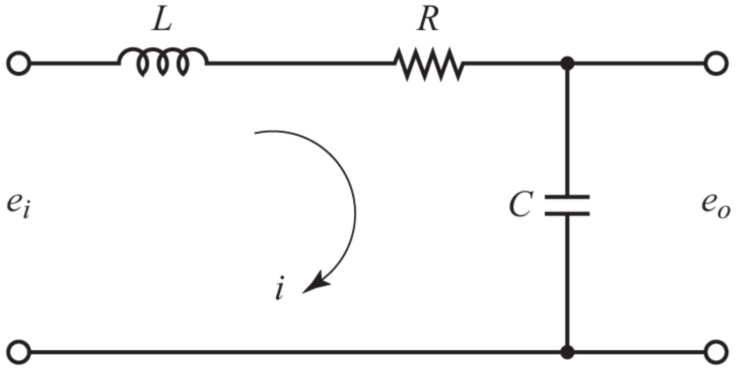








Sistema



Domínio do Tempo (t)

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

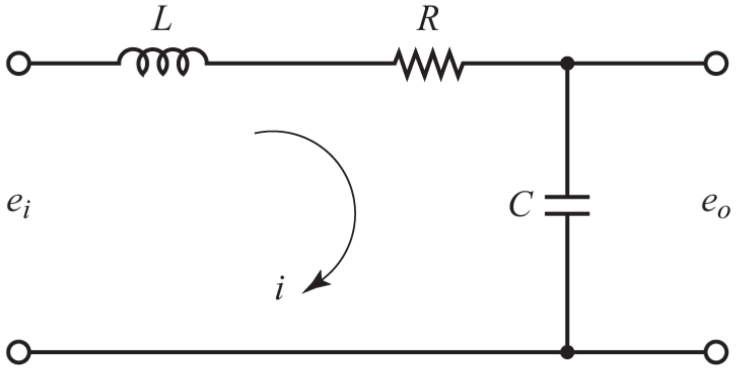
$$\mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Domínio das Frequências Complexas (s)

$$s^2E_o(s) + \frac{R}{L}sE_o(s) + \frac{1}{LC}E_o(s) = \frac{1}{LC}E_i(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	t^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$



Domínio do Tempo (t)

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

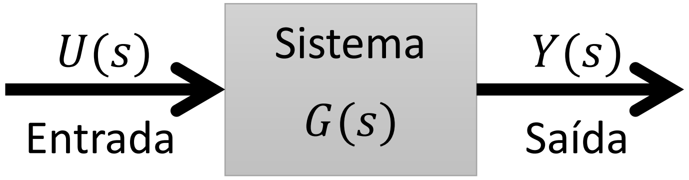
$$\mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Domínio das Frequências Complexas (s)

$$s^2E_o(s) + \frac{R}{L}sE_o(s) + \frac{1}{LC}E_o(s) = \frac{1}{LC}E_i(s)$$

Função de Transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$



$$Y(s) = U(s)G(s)$$

$$E_o(s)\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = \frac{1}{LC}E_i(s)$$

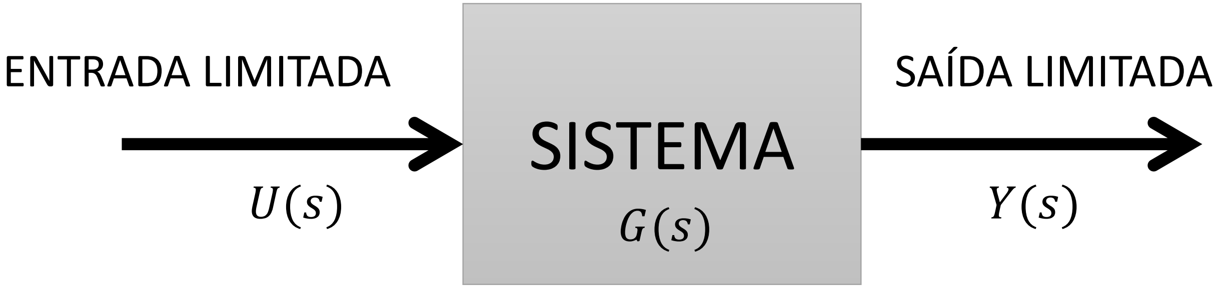
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

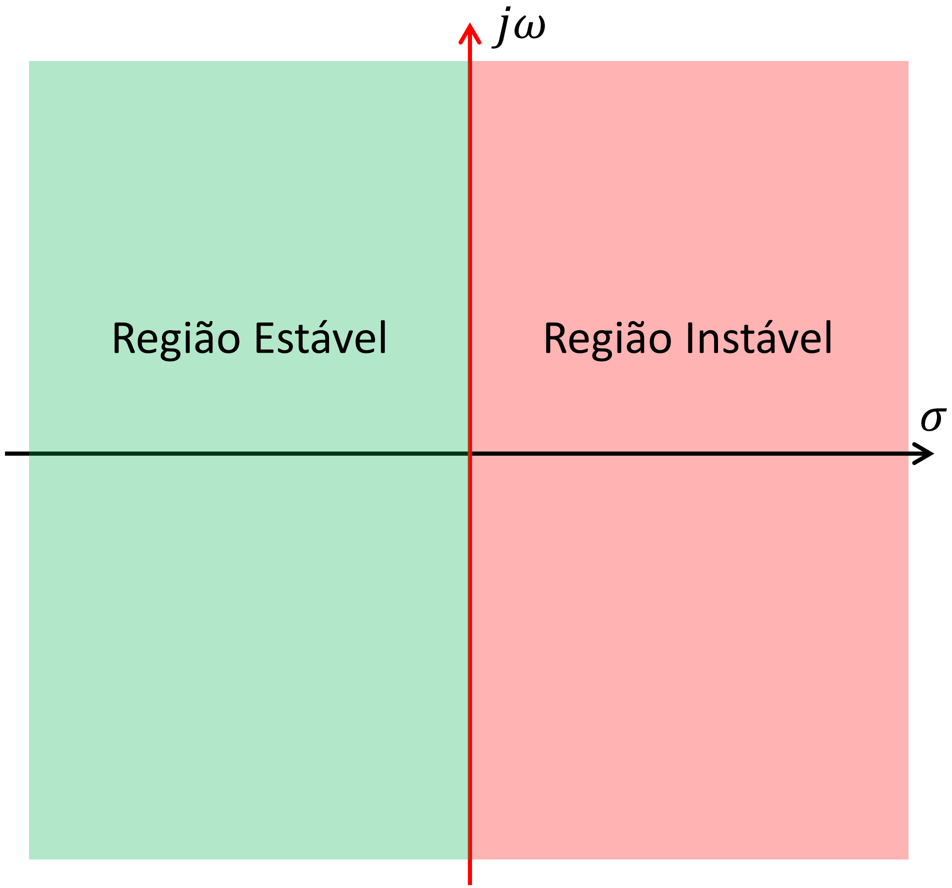
Estabilidade

- Estabilidade é um dos critérios mais importantes do projeto de sistemas de controle;
- BIBO: Bounded Input Bounded Output (Entrada Limitada Saída Limitada);
- Um sistema é BIBO estável se e somente se para toda e qualquer entrada limitada em amplitude $u(t)$ for produzida uma saída também limitada em amplitude $y(t)$.
- Se a saída divergir para ao menos uma entrada limitada o sistema NÃO é BIBO estável.



Estabilidade

- Um sistema é BIBO estável se todos os polos da função de transferência estiverem localizados no semi-plano esquerdo de ***s***.



$$G(s) = \frac{k_1}{a_1 - p_1} + \frac{k_2}{a_2 - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{a_n - p_n}$$

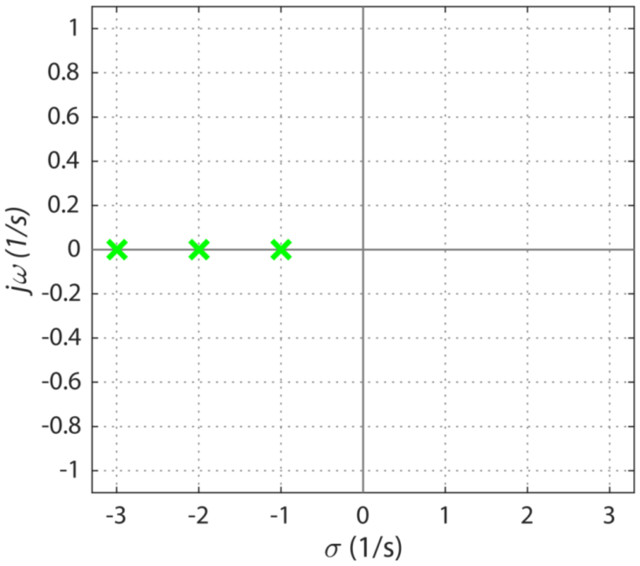
$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \cdots + k_n e^{p_n t}$$

Os polos precisam possuir parte real negativa para que as exponenciais tendam a zero.

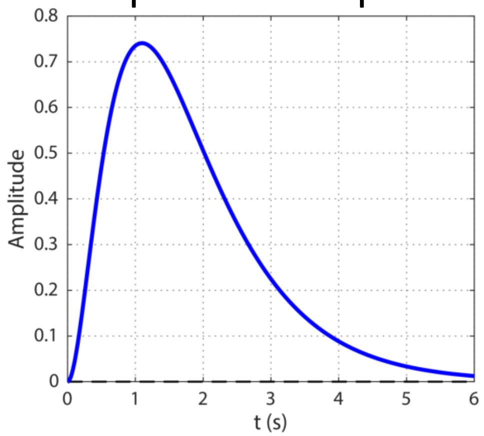
Caso 1: Sistema estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

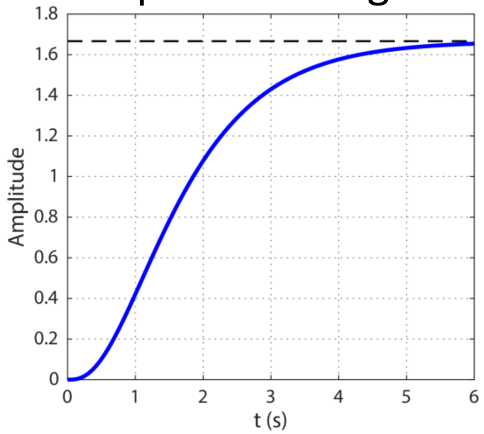
Polos



Resposta ao Impulso



Resposta ao Degrau



MATLAB

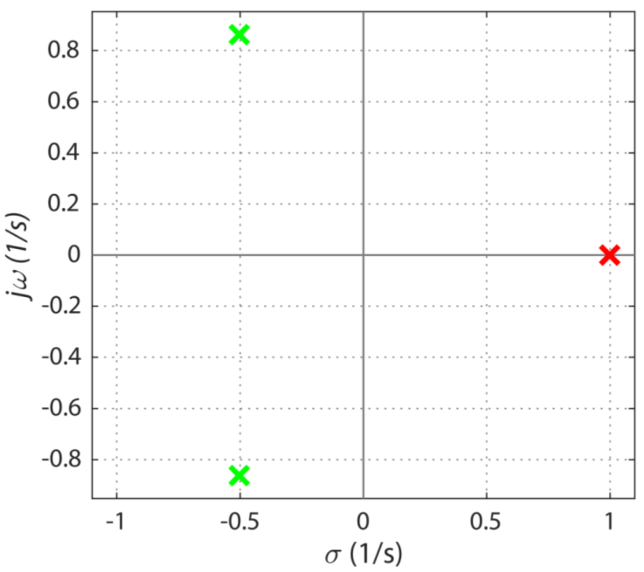
Command Window

```
>> gs = zpk([],[-1,-2,-3],10)

gs =

         10
  -----------------
  (s+1) (s+2) (s+3)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> pole(gs)

ans =

    -1
    -2
    -3

>> zero(gs)

ans =

   Empty matrix: 0-by-1

>> impulse(gs)
>> step(gs)
>>
```

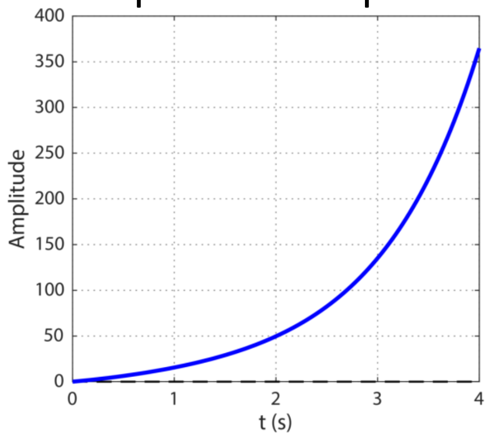
Caso 2 : Sistema instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

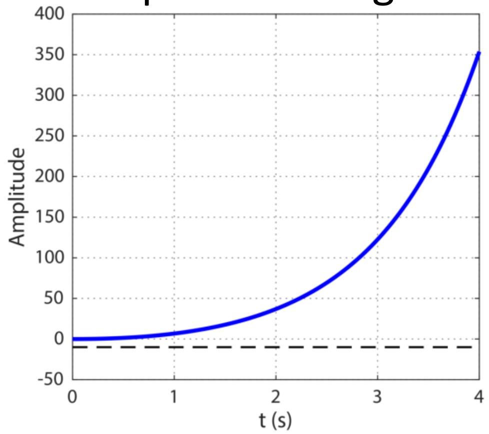
Polos



Resposta ao Impulso



Resposta ao Degrau



MATLAB

Command Window

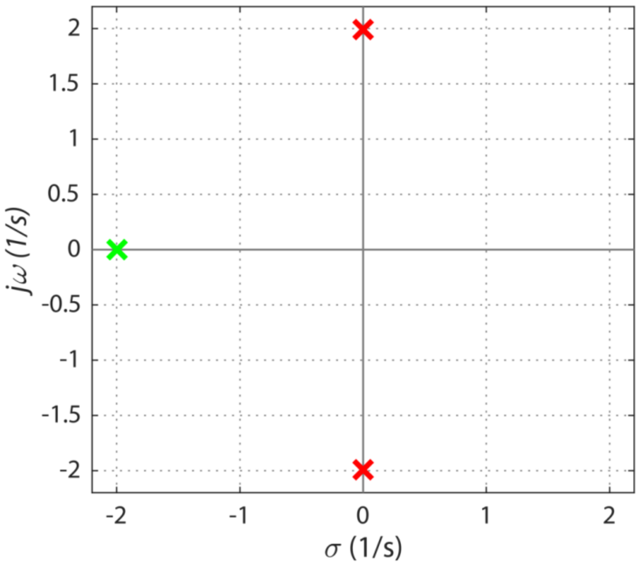
```
>> s = tf('s')

s =

  s

Continuous-time transfer function.

>> gs = (10*(s + 1))/((s - 1)*(s^2 + 1*s + 1))

gs =

  10 s + 10
  ---------
   s^3 - 1

Continuous-time transfer function.

>> pole(gs)

ans =

  -0.5000 + 0.8660i
  -0.5000 - 0.8660i
   1.0000 + 0.0000i

>> zero(gs)

ans =

    -1

>> impulse(gs)
>> step(gs)
>> 
```

Estabilidade

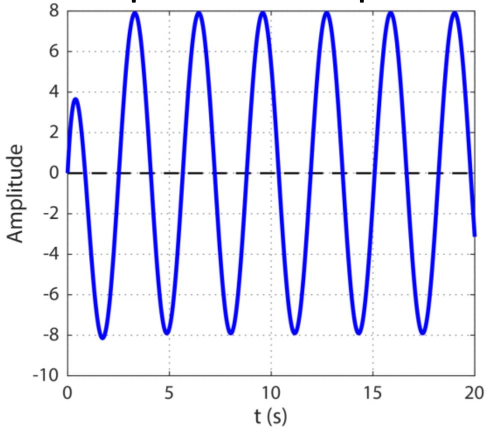
❑Caso 3: sistema marginalmente estável

$$G(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$$

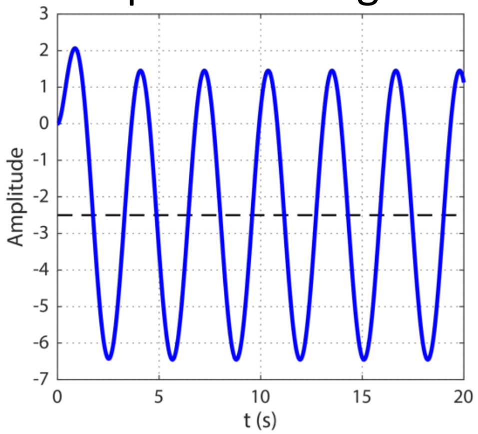
Polos



Resposta ao Impulso



Resposta ao Degrau



MATLAB

Command Window

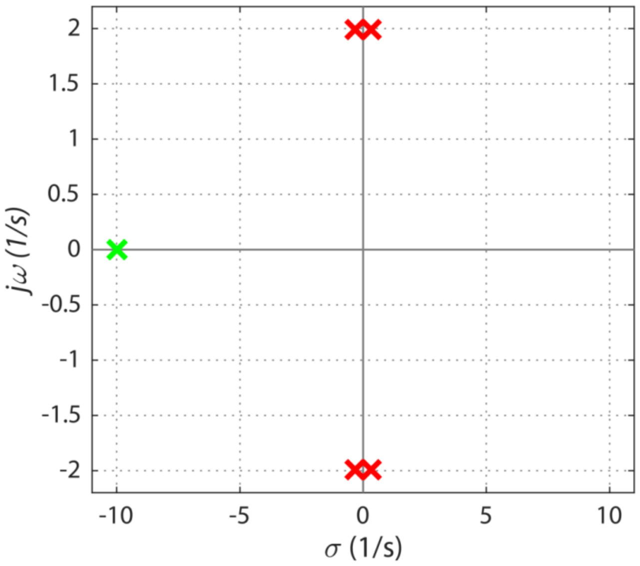
```
>> s = tf('s')

s =

  s

Continuous-time transfer function.

>> gs = (20*(s - 1))/((s + 2)*(s^2 + 4))

gs =

        20 s - 20
  ---------------------
  s^3 + 2 s^2 + 4 s + 8

Continuous-time transfer function.

>> pole(gs)

ans =

  -2.0000 + 0.0000i
  -0.0000 + 2.0000i
  -0.0000 - 2.0000i

>> zero(gs)

ans =

     1

>> impulse(gs)
>> step(gs)
>>
```

Estabilidade

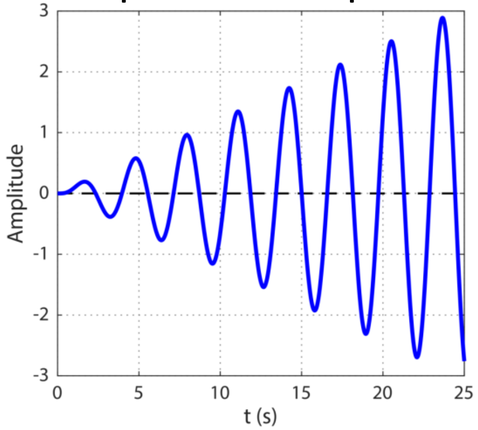
❑Caso 4 : Sistema instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}$$

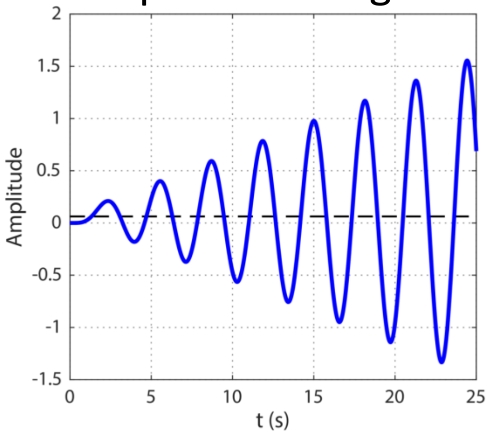
Polos



Resposta ao Impulso



Resposta ao Degrau



MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s')

s =

  s

Continuous-time transfer function.

>> gs = 10/(((s^2 + 4)^2)*(s + 10))

gs =

                        10
  ------------------------------------------
  s^5 + 10 s^4 + 8 s^3 + 80 s^2 + 16 s + 160

Continuous-time transfer function.

>> pole(gs)

ans =

 -10.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 2.0000i
   0.0000 - 2.0000i
  -0.0000 + 2.0000i
  -0.0000 - 2.0000i

>> zero(gs)

ans =

   Empty matrix: 0-by-1

>> impulse(gs)
>> step(gs)
>>
```

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Método para analisar a estabilidade de sistemas de controle lineares sem a necessidade de extrair os polos da função de transferência.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0}$$

Equação característica

$$\begin{array}{c|c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

O número de polos no semi-plano direito de ***s*** é igual ao número de trocas de sinal da primeira coluna

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s');
>> gs = 10/((s + 1)*(s + 2)*(s + 3))

gs =

          10
  ----------------------
  s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6

Continuous-time transfer function.

>>
```

s^3	a_0	a_2	a_4
s^2	a_1	a_3	a_5
s^1			
s^0			

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s');
>> gs = 10/((s + 1)*(s + 2)*(s + 3))

gs =

           10
  ----------------------
  s^3 + 6 s^2 + 11 s + 6

Continuous-time transfer function.

>>
```

s^3	1	11	
s^2	6	6	
s^1			
s^0			

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

❑Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^3	1	11	
s^2	$\boxed{6}$	6	
s^1	$\frac{6 \cdot 11 - 1 \cdot 6}{6}$		
s^0			

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^3	1	11	0
s^2	6	6	0
s^1	10		
s^0			

EEL-USP
Escola de Engenharia de Lorena

❑Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^3	1	11	0
s^2	$\boxed{6}$	6	0
s^1	10	$\frac{6 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{6}$	
s^0			

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^3	1	11	0
s^2	$\boxed{6}$	6	0
s^1	10	0	
s^0			

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

s^3	1	11	0
s^2	6	6	0
s^1	$\boxed{10}$	0	
s^0	$\frac{10 \cdot 6 - 6 \cdot 0}{10}$		

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

s^3	1	11	0
s^2	6	6	0
s^1	10	0	
s^0	6		

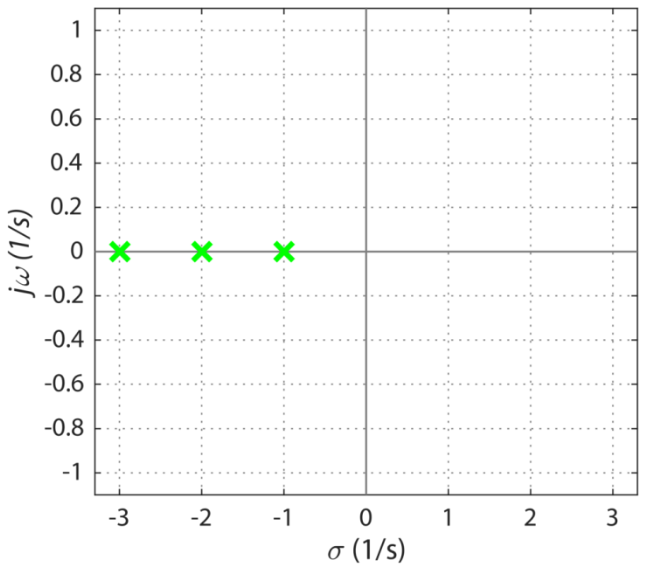
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

EEL-USP
Escola de Engenharia de Lorena

Caso 1: Sistema Estável

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

s^3	1	11	0
s^2	6	6	0
s^1	10	0	
s^0	6		



Conclusões:

1. Não ocorreram trocas de sinal na primeira coluna;
2. Sistema estável!!!

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s');
>> gs = (10*(s + 1))/((s - 1)*(s^2 + s + 1))

gs =

  10 s + 10
  ---------
   s^3 - 1

Continuous-time transfer function.

>>
```

s^3	a_0	a_2	a_4
s^2	a_1	a_3	a_5
s^1			
s^0			

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s');
>> gs = (10*(s + 1))/((s - 1)*(s^2 + s + 1))

gs =

  10 s + 10
  ---------
   s^3 - 1

Continuous-time transfer function.

>>
```

s^3	1	0	
s^2	0	-6	
s^1			
s^0			

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

Quando um dos coeficientes de uma linha for nulo é necessário substituir esse coeficiente por um valor bem pequeno (ϵ).

s^3	1	0	
s^2	$\boxed{0}$	-6	
s^1			
s^0			

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

Quando um dos coeficientes de uma linha for nulo é necessário substituir esse coeficiente por um valor bem pequeno (ϵ).

s^3	1	0	
s^2	$0 \to \epsilon$	-6	
s^1			
s^0			

❑Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^3	1	0	
s^2	$\boxed{0 \rightarrow \epsilon}$	-6	
s^1	$\frac{0-1(-6)}{\epsilon}$		
s^0			

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

❑Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^3	1	0		
s^2	$\boxed{0 \rightarrow \epsilon}$	-6		
s^1	$\frac{6}{\epsilon}$			
s^0				

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

❑Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^3	1	0	
s^2	$\boxed{0 \to \epsilon}$	-6	
s^1	$\frac{6}{\epsilon}$	$\frac{0 - 1 \cdot 0}{\epsilon}$	
s^0			

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

❑Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^3	1	0	
s^2	$\boxed{0 \to \epsilon}$	-6	
s^1	$\frac{6}{\epsilon}$	0	
s^0			

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

s^3	1	0	
s^2	$0 \to \epsilon$	-6	
s^1	$\boxed{\frac{6}{\epsilon}}$	0	
s^0	$\frac{-36/\epsilon - \epsilon \cdot 0}{6/\epsilon}$		

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

❑Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

s^3	1	0	
s^2	$0 \rightarrow \epsilon$	-6	
s^1	$\boxed{\frac{6}{\epsilon}}$	0	
s^0	-6		

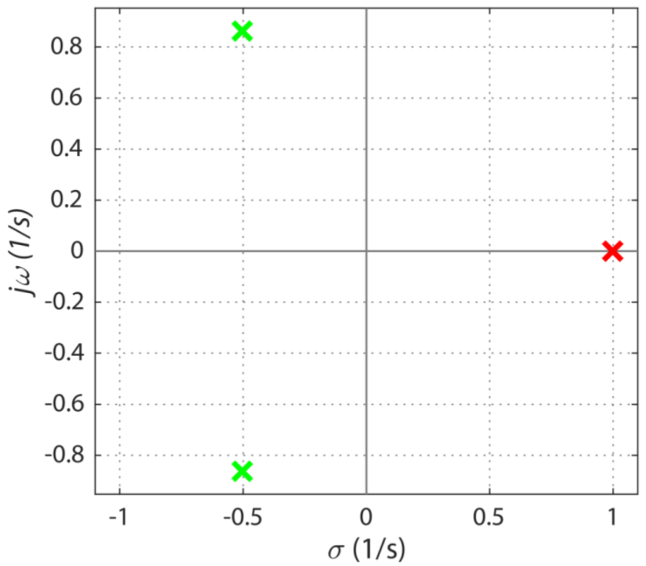
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 2: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{10s+10}{s^3-6}$$

s^3	1	0	
s^2	ϵ	-6	
s^1	$\frac{6}{\epsilon}$	0	
s^0	-6		



Conclusões:

1. Ocorreu uma troca de sinal;
2. Existe um polo no semi-plano direito de ***s***.
3. Sistema instável!!!

- Caso 4: Sistema Instável
- Todos os coeficientes em uma determinada linha são nulos.
- Isso indica que podem ocorrer as seguintes situações:
  - 1 – A equação possui pelo menos um par de raízes reais iguais mas de sinais opostos;
  - 2 – A equação tem um ou mais pares de raízes imaginárias;
  - 3 – A equação tem pares de raízes complexas conjugadas com partes reais simétricas. Ex: $s = x \pm jy$ e $s = -x \pm jy$.

s^5	a_0	a_2	a_4
s^4	a_1	a_3	a_5
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

EEL-USP
Escola de Engenharia de Lorena

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s')

s =

  s

Continuous-time transfer function.

>> gs = 10/(((s^2 + 4)^2)*(s + 10))

gs =

                    10
  -----------------------------------------
  s^5 + 10 s^4 + 8 s^3 + 80 s^2 + 16 s + 160
```

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

s^5	a_0	a_2	a_4
s^4	a_1	a_3	a_5
s^3			
s^2			
s^1			
s^0			

❑ Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

MATLAB

Command Window

```
>> s = tf('s')

s =

  s

Continuous-time transfer function.

>> gs = 10/(((s^2 + 4)^2)*(s + 10))

gs =

                        10
  -------------------------------------------
  s^5 + 10 s^4 + 8 s^3 + 80 s^2 + 16 s + 160
```

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3			
s^2			
s^1			
s^0			

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	$\boxed{10}$	80	160
s^3	$\frac{10\cdot 8 - 1\cdot 80}{10}$		
s^2			
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	0		
s^2			
s^1			
s^0			

❑Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	$\boxed{10}$	80	160
s^3	0	$\frac{10 \cdot 16 - 1 \cdot 160}{10}$	
s^2			
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	0	0	
s^2			
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	$\boxed{10}$	80	160
s^3	0	0	$\frac{10 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{10}$
s^2			
s^1			
s^0			

❑Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

❑Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

Quando todos os coeficientes em uma linha são nulos é necessário substituir esses coeficientes pelos coeficientes obtidos através de uma equação auxiliar.

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

Polinômio auxiliar $\leftarrow P(s)$

Equação auxiliar: $P(s) = 10s^4 + 80s^2 + 160$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 40s^3 + 160s$$

EEL-USP Escola de Engenharia de Lorena

❑ Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

Quando todos os coeficientes em uma linha são nulos é necessário substituir esses coeficientes pelos coeficientes obtidos através de uma equação auxiliar.

Equação auxiliar: $P(s) = 10s^4 + 80s^2 + 160$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 40s^3 + 160s$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2			
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	$\boxed{40}$	160	0
s^2	$\frac{40\cdot 80 - 10\cdot 160}{40}$		
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40		
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	$\boxed{40}$	160	0
s^2	40	$\frac{40 \cdot 160 - 10 \cdot 0}{40}$	
s^1			
s^0			

Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

❑Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	$\boxed{40}$	160	0
s^2	40	160	$\frac{40 \cdot 0 - 10 \cdot 0}{40}$
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	$\boxed{40}$	160	0
s^2	40	160	0
s^1			
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	$\boxed{40}$	160	0
s^1	$\frac{40\cdot 160 - 40\cdot 160}{40}$		
s^0			

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

❑Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	0		
s^0			

❑ Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	0	0	0
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

Quando todos os coeficientes em uma linha são nulos é necessário substituir esses coeficientes pelos coeficientes obtidos através de uma equação auxiliar.

Equação auxiliar: $P(s) = 40s^2 + 160$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 80s$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	0	0	0
s^0			

Polinômio auxiliar $P(s)$

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

Quando todos os coeficientes em uma linha são nulos é necessário substituir esses coeficientes pelos coeficientes obtidos através de uma equação auxiliar.

Equação auxiliar: $P(s) = 40s^2 + 160$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 80s$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	80	0	0
s^0			

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5+10s^4+8s^3+80s^2+16s+160}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	$\boxed{80}$	0	0
s^0	80	0	0

$$e_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1}$$

EEL-USP
Escola de Engenharia de Lorena

Caso 4: Sistema Instável

$$G(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)} = \frac{10}{s^5 + 10s^4 + 8s^3 + 80s^2 + 16s + 160}$$

s^5	1	8	16
s^4	10	80	160
s^3	40	160	0
s^2	40	160	0
s^1	80	0	0
s^0	80	0	0

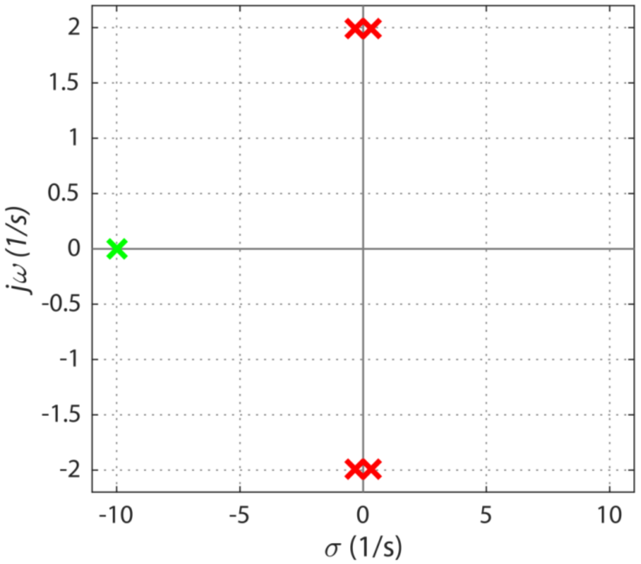
1 – A equação possui pelo menos um par de raízes reais iguais mas de sinais opostos;

2 – A equação tem um ou mais pares de raízes imaginárias;

3 – A equação tem pares de raízes complexas conjugadas com partes reais simétricas. Ex: $s = x \pm jy$ e $s = -x \pm jy$.

Conclusões:

1. Como não ocorreu troca de sinal na primeira coluna as situações 1 e 3 são descartadas;
2. A equação possui raízes imaginárias.
3. Como a situação 3 é falsa, as raízes complexas conjugadas situam-se na origem: $s = \pm jy$;
4. Como ocorreram duas linhas nulas, o sistema possui dois pares de raízes complexas conjugadas na origem;
5. Sistema instável!!!



Referências Bibliográficas

- K. Ogata, “Engenharia de controle moderno”, 5 ed., São Paulo, Pearson Prentice Hall (2010).