Regras de derivação

Maio 2020

Derivada de $f(x) = x^n$ para $n \neq 0$ natural

Solução: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$.

Vamos fazer uma troca de variável: $x + h = t$. Observe que $t \to x$ quando $h \to 0$. Logo, $f'(x) =$

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1})}{t - x} =$$

$$\lim_{t \to x} t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1} =$$

$x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$ pois é a soma de n parcelas iguais.

Exemplos

Se $f(x) = x^6$, $f'(x) = 6x^5$.
Se $f(x) = x^{500}$, $f'(x) = 500x^{499}$.

Derivada de $f(x) = x^{-n}$ para $n \neq 0$ natural

Solução: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0} -\dfrac{[(x+h)^n - x^n]}{h} . \dfrac{1}{(x+h)^n x^n}$

Observamos que $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$ e $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{(x+h)^n x^n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$,

então temos que $f'(x) = -nx^{n-1} . \dfrac{1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$ para $x \neq 0$.

Exemplos

Se $f(x) = x^{-8}$, $f'(x) = -8x^{-8-1} = -8x^{-9}$.

Se $f(x) = x^{-200}$, $f'(x) = -200x^{-200-1} = -200x^{-201}$

Derivada de $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ para $n \neq 0$ natural

Solução: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{t \to x} \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t - x}$. Observamos que

$$\frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{t - x} = \frac{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{x})(\sqrt[n]{t^{n-1}} + \sqrt[n]{t^{n-2}x} + \cdots + \sqrt[n]{x^{n-1}})}.$$

Assim, para $x \neq 0$ e x no domínio de f,

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{1}{\sqrt[n]{t^{n-1}} + \sqrt[n]{t^{n-2}x} + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Exemplos

Se $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$, $f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$.

Se $f(x) = \sqrt[8]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{8}x^{\frac{1}{8}-1} = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Regras de derivação

Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então funções $f+g$, kf e $f.g$ são deriváveis em p e tem-se que:

1. $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$.
3. $(f.g)'(p) = f'(p).g(p) + f(p).g'(p)$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$

Estas regras seguem da definição da derivada e das propriedades do limite.

Demonstração de 3)

$$((f.g)'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} =$$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(x) + f(p)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} =$$

$$\lim_{x \to p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} . g(x) + f(p) . \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right] = f'(p).g(p) + f(p).g'(p).$$

Observamos que como g é derivável em p, temos que g será contínua em p e, assim, $\lim_{x \to p} g(x) = g(p)$

Demonstração de 4)

Primeiro vamos calcular:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(p) = \lim_{x\to p} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(p)}}{x-p} = \lim_{x\to p} -\frac{g(x)-g(p)}{x-p}.\frac{1}{g(x)g(p)} = \frac{-g'(p)}{[g(p)]^2}.$$

Pela Regra de derivação do produto temos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \left(f.\frac{1}{g}\right)'(p) = f'(p).\frac{1}{g(p)} + f(p)\left(\frac{1}{g}\right)'(p), \text{ ou seja,}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)}{g(p)} - \frac{f(p)g'(p)}{[g(p)]^2} = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}$$

Exemplo1

1) Seja $f(x) = 4x^3 - x^2 - 5x + 7$. Calcular $f'(x)$ e $f'(1)$.
Solução: $f'(x) = 4.3x^2 - 2x - 5 = 12x^2 - 2x - 5$
$f'(1) = 12 - 2 - 5 = 5$

Exemplo 2

Seja $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$, calcular $f'(x)$.

Solução: $f'(x) = \dfrac{(2x+3)'(x^2+1) - (2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2(x^2+1) - (2x+3)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}$$

Exemplo 3

Seja $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2$, calcule $f'(x)$.

Solução: $f'(x) = 5.3x^4 + \dfrac{1}{3}.4x^3 + 1 = 15x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 1$

Exemplo 4

Seja $f(x) = (x^5 + x - 1).\dfrac{7x^2 + 2}{x - 1}$. Calcular $f'(x)$.

Solução: $f'(x) = (x^5 + x - 1)'\dfrac{7x^2 + 2}{x - 1} + (x^5 + x - 1)(\dfrac{7x^2 + 2}{x - 1})' =$

$(5x^4 + 1)\dfrac{7x^2 + 2}{x - 1} + (x^5 + x - 1)(\dfrac{(14x)(x - 1) - (7x^2 + 2)(1)}{(x - 1)^2})$