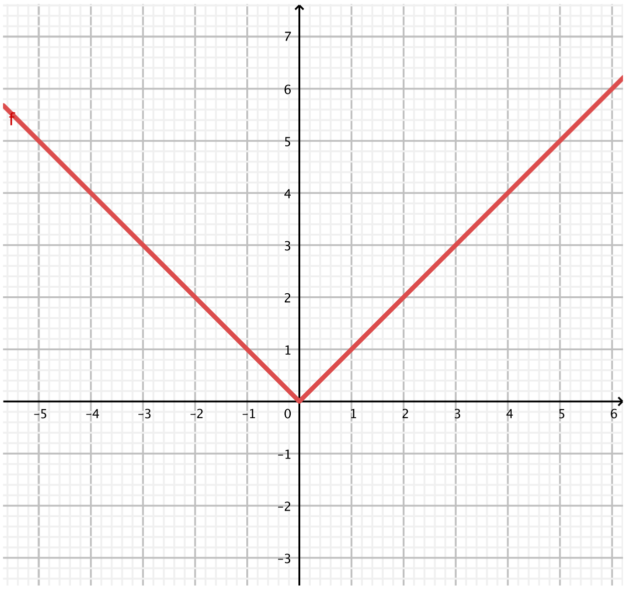
Diferenciabilidade X Continuidade

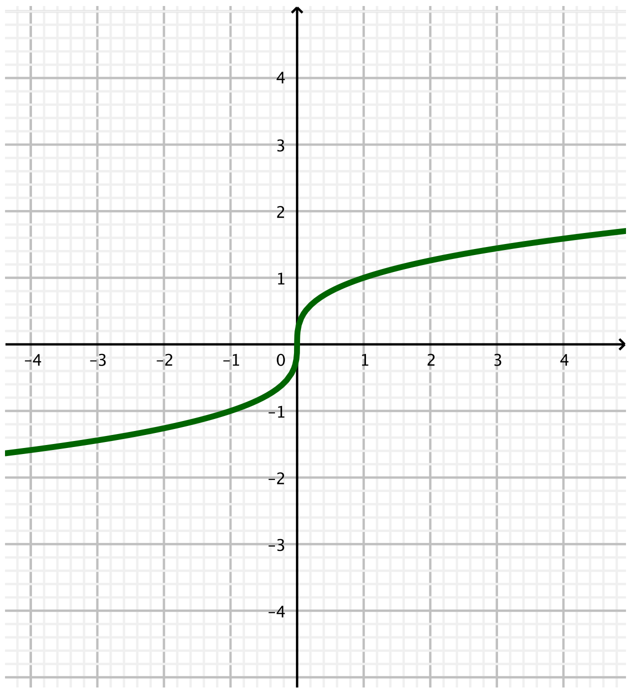
Maio 2020

Continuidade em um ponto não implica Diferenciabilidade neste ponto

(1)



(2)



Analisando os exemplos

Exemplo 1

A função $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $(0,0)$, mas não é derivável neste ponto.

Continuidade

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0$ pois
$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0} -x = 0 = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0^+} |x|$ que é igual a $f(0) = 0$. Logo, $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$.

Diferenciabilidade

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$. Ou seja, $f'(0)$ não existe. Então $f(x) = |x|$ não possui derivada em $x = 0$.

Exemplo 2

A função $f(x) = x^{1/3}$ é contínua no ponto $(0, 0)$, mas não é derivável neste ponto.

Continuidade

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$. Logo, $f(x) = x^{1/3}$ é contínua em $x = 0$.

Diferenciabilidade

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^{1/3} - 0^{1/3}}{h}.$$

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$. Ou seja, $f'(0)$ não existe. Então $f(x) = x^{1/3}$ não possui derivada em $x = 0$.

Diferenciabilidade em um ponto implica a Continuidade neste ponto

Teorema: Se $f(x)$ for derivável em um ponto $x = a$, então $f(x)$ é contínua em $x = a$

Demonstração

Queremos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) =$$

$(\lim_{x\to a}(x-a))\left((\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = 0.f'(a) = 0$. Observamos que $f'(a)$ existe pois $f(x)$ é derivável em $x = a$. Logo, $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ implica que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Aplicando o Teorema

Exemplo 1

A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ é derivável em $x = 1$?

Solução: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$. Como f não é contínua em $x = 1$, segue que f não é derivável em 1 pelo Teorema.

Exemplo 2

A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$ é derivável em $x = 1$? É contínua em $x = 1$? **Solução**: $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2.$$

Logo,$f(x)$ é derivável em $x = 1 \Longrightarrow f(x)$ é contínua em $x = 1$.