2.3. INTEGRAIS DE FUNÇÕES CONTENDO UM TRINÔMIO QUADRADO

CASO 1

2.3.1. Vamos considerar a integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Primeiramente, vamos transformar o trinômio do denominador, representando-o como soma ou diferença de quadrados:

1º Passo: colocar a em evidência, tirando-o da integral

2º Passo: Multiplicar e dividir "x" por 2 (se necessário)

3º Passo: somar e subtrair o 2º termo ao quadrado

4º Passo: Fatorar obtendo (quadrado)

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

5º Passo: agrupamos termos restantes em $\pm k^2$

onde $\pm k^2 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}$

6º Passo: Chamando de "u" o conteúdo do parênteses

O sinal depende das raízes do trinômio serem complexas ou reais.

tabela básica

Então, a integral I_1 toma a forma

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}$$

Façamos a mudança de variável

$u = x + \dfrac{b}{2a}$, $du = dx$. Então, $I_1 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{du}{u^2 \pm k^2}$ que são integrais da tabela básica.

EXEMPLO: Calcule a integral

$\Delta = 64 - 4(2)(20) < 0$

sem raízes reais

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Temos $2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) =$

$2(x^2 + 4x + 4 - 4 + 10) = 2[(x + 2)^2 + 6]$

Logo,

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{[(x + 2)^2 + 6]}$$

Façamos a substituição $u = x + 2$, $du = dx$.

Então,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \text{arc tg} \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \text{arc tg} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} + C$$

2.3.2. Consideremos uma integral de forma mais geral:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

1º passo: Obter a derivada do denominador [illegible] rado

Numerador: 2º: no lugar de x coloca a derivada juntando [illegible]

3º: [illegible]

Façamos uma transformação no numerador, de tal forma que a expressão linear coincida com a derivada do denominador:

4º: Separa em 2 integrais [illegible] de as constantes

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx =$$

5º: [illegible] integral, fazer substituição [illegible]

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

A segunda integral coincide com a integral anterior I_1. Na primeira integral, façamos a substituição

$u = ax^2 + bx + c$, $\quad du = (2ax + b)\, dx$

Temos $\displaystyle\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{du}{u} = L|u| + C = L|ax^2 + bx + c| + C.$

Então, $\displaystyle I_2 = \frac{A}{2a} L|ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1$

EXEMPLO: Calcule a integral

$$I = \int \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 5} dx$$

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 2) + (3 + 1)}{x^2 - 2x - 5} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5} dx +$$

$$+ 4 \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1) - 5 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5} dx +$$

$$+ 4 \int \frac{dx}{(x - 1)^2 - 6}$$

Fazendo as substituições

$v = x^2 - 2x - 5, \qquad dv = (2x - 2)\, dx \qquad$ e

$u = x - 1, \qquad du = dx, \qquad$ temos

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} + 4 \int \frac{du}{u^2 - 6} = \frac{1}{2} L|v| + 4 \frac{1}{2\sqrt{6}} L\left|\frac{\sqrt{6} - u}{\sqrt{6} + u}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{2} L|x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} L\left|\frac{\sqrt{6} - (x - 1)}{\sqrt{6} + (x - 1)}\right| + c.$$

Como u^2, 6 estão multiplicados por (-1), com relação à tabela, troco o numerador com o denominador no logaritmo como foi feito.

CASO 3

2.3.3. Vamos considerar a integral

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Coincide c o caso 1, a não ser pela integral da tabela básica

Pelas observações do ítem 2.3.1., podemos reduzir a integral I_3 a uma das integrais

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \qquad \text{ou} \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}},$$

que são integrais da tabela básica.

CASO 4

2.3.4. Uma integral da forma

$$I_4 = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Coincide com o caso 2, exceto pela tabela básica

é calculada utilizando-se as mesmas técnicas do ítem 2.3.2..

EXEMPLO: Obtenha

$$I = \int \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}}\, dx$$

Temos

$$I = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) + (3 - 10)}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}}\, dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}}\, dx -$$

$$-7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 + 6}} = 5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7\, L|x + 2 +$$

$$+ \sqrt{(x + 2)^2 + 6}| + c.$$

EXERCÍCIOS 2.3.

Calcular:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

c) $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 7x + 13}$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}$

g) $\int \frac{(x + 3)\,dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$

h) $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}$