Monitoria - Tema: mmc / exs - lista de revisão

Dizemos que $M(a,b)$ é o conjunto dos múltiplos comuns de a e b, i.e.,

$$M(a,b) = \{ m \in \mathbb{Z} : a \mid m \text{ e } b \mid m \}.$$

e $M^+(a,b) = \{ m \in \mathbb{Z} : m > 0,\ a \mid m \text{ e } b \mid m$

Definição: Chama-se mínimo múltiplo comum de a e b o menor de seus múltiplos, i.e

$$\text{mmc}(a,b) = \min M^+(a,b)$$

obs: Note $M^+(a,b) \neq \emptyset$, pois $|a| \cdot |b| \in M^+(a,b)$ e como $M^+(a,b) \subseteq \mathbb{N}$, podemos usar o P.B.O e, portanto existe mínimo de $M^+(a,b)$.

Lema 2.5.2:

Demonstração: Vamos mostrar que $M(a,b)$ é um ideal de $\mathbb{Z}$, i.e.,

1) $\alpha+\beta \in M(a,b)$, $\forall \alpha, \beta \in M(a,b)$

2) $\alpha z \in M(a,b)$, $\forall \alpha \in M(a,b)$, $\forall z \in \mathbb{Z}$

(Ideal à direita)

1) Sejam $\alpha, \beta \in M(a,b) \Rightarrow a|\alpha$ e $a|\beta \Rightarrow$ $a|\alpha+\beta$. Analogamente, $b|\alpha$, $b|\beta \Rightarrow b|\alpha+\beta$.

Logo, $\alpha + \beta \in M(a,b)$

(2) Seja $\alpha \in M(a,b)$ e $z \in \mathbb{Z}$, então

$a|\alpha$ e $b|\alpha \Rightarrow a|\alpha z$ e $b|\alpha z$. Logo

$\alpha z \in M(a,b)$.

Assim, $M(a,b)$ é ideal de $\mathbb{Z}$. Já vimos que todo ideal de $\mathbb{Z}$ é principal, i.e, da forma $m\mathbb{Z}$. Pelo teo. 2.3.2, $m = \min M^+(a,b) \Rightarrow m = mmc(a,b)$.

Daí, $M(a,b) = (\underbrace{mmc(a,b)}_{m}) \cdot \mathbb{Z}$. Com isso, se $m' \in M(a,b)$, então $m' = m \cdot k \Rightarrow m|m'$ $\blacksquare$

→ Nova caracterização do mmc

Chamamos assim, pois podemos usar essa nova caracterização como a definição de mmc. (É mais fácil usar o próx. teorema para verificar que $m = mmc(a,b)$).

Teorema 2.5.3

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $m = mmc(a,b) \Rightarrow a \mid m$ e $b \mid m$.

Pelo lema anterior, vale (ii).

Agora, vamos provar a recíproca.

Seja $m > 0$. devemos ter que m verifica (i), logo, $a \mid m$ e $b \mid m \Rightarrow m \in M^+(a,b)$. Agora, usando (ii), como $\underline{m \leq |m'|}$ (pois $m \mid m'$), segue que $m = \min M^+(a,b)$. $\Rightarrow m = \text{mmc}(a,b)$

(*) ~~T~~ Importante

Teorema: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $d = \text{mdc}(a,b)$, $m = \text{mmc}(a,b)$. Então $m \cdot d = |a \cdot b|$

Obs para o teorema 2.5.4:

1)

Ex 14 (item ii): Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tq

$ar + bs = 1 \Rightarrow mdc(a, b) = 1.$

P: Seja $d = mdc(a,b) \Rightarrow d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow$

$d \mid ar$ e $d \mid bs \Rightarrow d \mid ar + bs = 1 \overset{d>0}{\Rightarrow}$

$d = 1.$

2) Seja $d = mdc(a,b) \Rightarrow d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow$

$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = d a_1$ e $b = d \cdot b_1$.

Temos que $mdc(a_1, b_1) = 1.$

Note que $a = a_1 d$ e $b = b_1 \cdot d$ (pois $d = \text{mdc}(a,b)$)

Assim, pela obs 2, $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$. Com isso, podemos escrever $x = a_1 \cdot b$ (pois, $x = \frac{a_1 \cancel{d} \cdot b}{\cancel{d}} = a_1 \cdot b$). Analogamente, $x = a \cdot b_1$. Com essas equações garantimos que $a \mid x$ e $b \mid x$. Fica provado o item (i) do teo. 2.5.3.

Vamos provar o item (iv) de 2.5.3

Então, seja $m' \in \mathbb{Z}$ (múltiplo comum de a, b)

Como $a \mid m' \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m' = a \cdot q = a_1 \cdot d \cdot q \quad (*)$$

Pelo fato de $b \mid m' \Rightarrow b_1 \cancel{d} \mid a_1 \cdot \cancel{d} q \Rightarrow$

$b_1 \mid q$ (pelo teo de Euclides / $mdc(b_1, a_1) = 1$)

Assim, $q = b_1 \cdot c \overset{(*)}{\Rightarrow} m' = a_1 \underbrace{d \cdot b_1}_{b} c \Rightarrow m' = xc$

$$\underbrace{a_1 \cdot b}_{x}$$

Logo, $x \mid m'$ e portanto, provamos (iv). $\blacksquare$

Do teorema anterior

$$mmc(a,b) = \frac{|ab|}{mdc(a,b)} \qquad (**)$$

→ Exs

(i) $mmc(n, n+1)$

Prova: Seja $d = mdc(n, n+1) \Rightarrow d \mid n,\ d \mid n+1 \Rightarrow$

$n = d.k$ e $n+1 = d.l \Rightarrow$

$$dk + 1 = dl \Rightarrow 1 = d(l-k) \Rightarrow$$

$d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

Usando $(**)$, $mmc(n, n+1) = |n(n+1)| = |n^2 + n| =$
$n^2 + n$ $\blacksquare$

(ii) $\mathrm{mmc}(2n-1, 2n+1)$

Prova: Seja $d = \mathrm{mdc}(2n-1, 2n+1) \Rightarrow$

$d \mid 2n-1$ e $d \mid 2n+1 \Rightarrow$

$2n+1 = dk$ e $2n-1 = dl$. Daí,

$dk = 2n+1 = (dl+1)+1 = dl+2 \Rightarrow$

$d(k-l) = 2$. Note $2n+1$ e $2n-1$ são ímpares

e como $d \mid 2 \Rightarrow d = 1$. Logo usando (**)

$$\mathrm{mmc}(2n-1, 2n+1) = |4n^2-1| = \begin{cases} 4n^2-1, & n \neq 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Ex 24

Vamos usar o ex 15 (prop. 2.3.6 - pág 67)

(i) $\forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, $mmc(ka, kb) = |k|\, mmc(a,b)$

Prova: Pelo ex 15 (item i),

$mdc(ka, kb) = |k|\, mdc(a,b)$. Daí, por (**)

$$mmc(ka, kb) = \frac{\cancel{|k|}|k|\,|ab|}{\cancel{|k|}\, mdc(a,b)} = |k| \cdot mmc(a,b)$$

$\boxtimes$