6.5. Modelos mais gerais

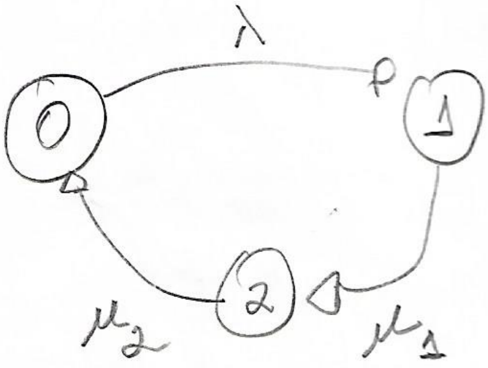
(1) Modelo dos engraxates

Considere um local de engraxar sapatos que consiste de 2 cadeiras. Na 1ª o cliente tem o sapato limpo e polido. Na 2ª o sapato é engraxado. Os tempos de serviço nas 2 cadeiras são independentes e exponencialmente distribuídos com taxas μ_1 e μ_2 respectivamente. Clientes em potencial chegam de acordo com uma taxa exponencial λ, e este cliente em potencial somente entrará na loja se as 2 cadeiras estiverem vazias. Qual é a proporção dos clientes em potencial que entram na loja?

Estado 0 → sistema vazio

" 1 → cliente na cadeira 1

" 2 → cliente na cadeira 2



Estado	Entra		Sai
0	$\mu_2 P_2$	=	λP_0
1	λP_0	=	$\mu_1 P_1$
2	$\mu_1 P_1$	=	$\mu_2 P_2$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} P_0, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0, \quad P_0 + P_1 + P_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}\right) P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2}, \quad P_1 = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2}, \quad P_2 = \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 \mu_2 + \lambda \mu_1 + \lambda \mu_2}$$

Proporção dos clientes que entram na loja = Proporção do tempo que o sistema fica vazio = P_0

$P_1 = P_2 = 1/3$ $\qquad$ $\lambda = 1/\text{hora}$

<u>Exemplo</u>: $\mu_1 = \mu_2 = \lambda = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$, $L = 2/3$, $W = 2\,\text{hr}$

$\lambda = 2/\text{hora}$

$\mu_1 = \mu_2 = 1,\ \lambda = 2 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{5} = 20\%$, $L = 4/5$, $W = 2\,\text{hr}$

$P_1 = P_2 = 2/5$

<u>OBS</u>: Não podemos substituir o modelo acima por um outro com 2 estados

0 → sistema vazio

1 → sistema com uma pessoa $\quad E(T) = E(T_1) + E(T_2) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{-1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

Não é um modelo exponencial (saída do estado 1 tem tempo de espera com distribuição gama).

Modelos Exponenciais: (i) Sistema está em somente um estado em cada instante de tempo.

(ii) Tempo em cada estado tem distribuição exponencial.

23ª aula

② Outro modelo de engraxates

Considere o modelo de engraxates anterior mas, agora, clientes entram mesmo se a 2ª cadeira estiver ocupada. Neste caso o cliente da 1ª cadeira espera se o seu serviço terminar antes.

a) Qual é a proporção de clientes em potencial que entra no sistema?

b) Qual é o número médio de clientes no sistema?

c) Qual é a quantidade de tempo médio que um cliente que entra no sistema gasta?

Estado

Estado

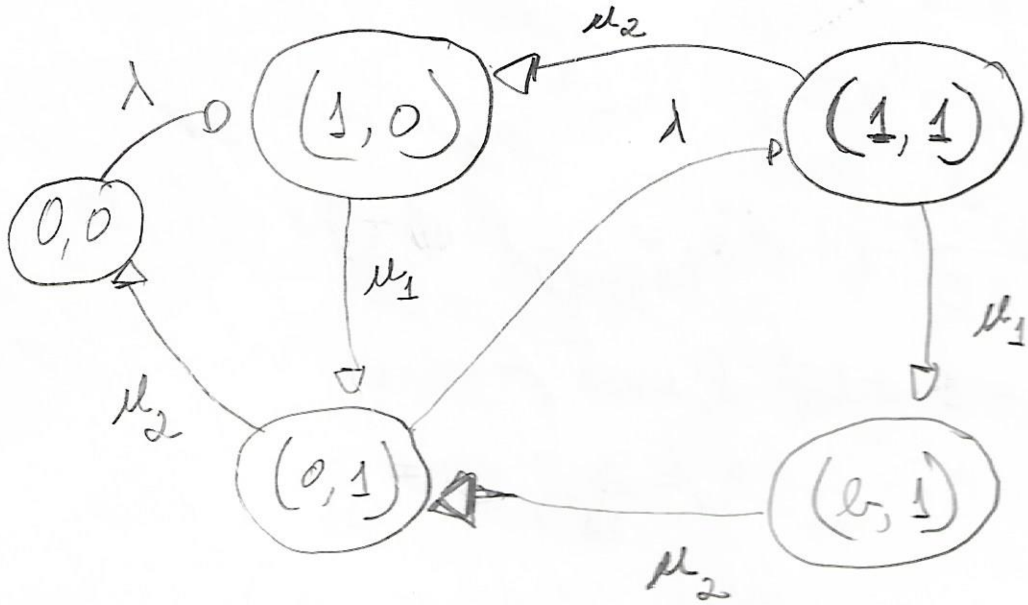
(0,0) = sistema vazio

(1,0) = 1 cliente na cadeira 1, 0 cliente na cadeira 2

(0,1) = 0 cliente na cadeira 1, 1 cliente na cadeira 2

(1,1) = 1 cliente na cadeira 1, 1 cliente na cadeira 2

(b,1) = cliente na cadeira 1 aguardando término do serviço na cadeira 2, 1 cliente na cadeira 2.



Equações de balanço

Estado	sai	=	entra
$(0,0)$	λP_{00}	$=$	$\mu_2 P_{01}$
$(1,0)$	$\mu_1 P_{10}$	$=$	$\lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}$
$(0,1)$	$(\mu_2+\lambda) P_{01}$	$=$	$\mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{b1}$
$(1,1)$	$(\mu_1+\mu_2) P_{11}$	$=$	λP_{01}
$(b,1)$	$\mu_2 P_{b1}$	$=$	$\mu_1 P_{11}$

$$P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} + P_{b1} = 1$$

a) Proporção dos clientes que entram na loja = Proporção do tempo que o sistema fica disponível para receber cliente $= P_{00} + P_{01}$

b) $L = 1(P_{10} + P_{01}) + 2(P_{11} + P_{b1})$

c) $W = \dfrac{L}{\lambda_a}$, $\lambda_a = \lambda(P_{00} + P_{01}) \Rightarrow W = \dfrac{P_{10} + P_{01} + 2(P_{11} + P_{b1})}{\lambda(P_{00} + P_{01})}$

ii) Se $\lambda = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, então ($E(T_1) = 1$, $E(T_2) = 0.5$)

$P_{00} = \dfrac{12}{37}$, $P_{10} = \dfrac{16}{37}$, $P_{11} = \dfrac{2}{37}$, $P_{01} = \dfrac{6}{37}$, $P_{b1} = \dfrac{1}{37}$

$L = \dfrac{28}{37}$, $W = \dfrac{28}{18}^{1,55}$, $P_{00} + P_{01} = \dfrac{18}{37}$ 48,~~7~~% (% aceito)

iii) Se $\lambda = 1$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ então ($E(T_1) = 0.5$, $E(T_2) = 1$)

$P_{00} = \dfrac{3}{11}$, $P_{10} = \dfrac{2}{11}$, $P_{11} = \dfrac{1}{11}$, $P_{01} = \dfrac{3}{11}$, $P_{b1} = \dfrac{2}{11}$

$L = 1$ (4), $W = \dfrac{11}{6}$ (4)^{1,83} $P_{00} + P_{01} = \dfrac{6}{11}$ (4) 54,54% (% aceito)

$$P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} P_{00}$$

$$P_{11} = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} P_{01} = \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} P_{00}$$

$$P_{10} = \frac{\lambda}{\mu_1} P_{00} + \left(\frac{\cancel{\mu_2}}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda^2}{\cancel{\mu_2}(\mu_1+\mu_2)}\right) P_{00}$$

$$= \left(\frac{\mu_1+\mu_2+\lambda}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}\right)\lambda P_{00}$$

$$P_{e1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} P_{11} = \frac{\lambda^2 \mu_1}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)} P_{00}$$

$$P_{00}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda(\mu_1+\mu_2+\lambda)}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} + \frac{\lambda^2\mu_1}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right) = 1$$

Comparação com o Caso 1

i) $\lambda = \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow$

$$P_{00}\left(1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = P_{00}\left(\frac{3}{2} + 3\right) = P_{00}\left(\frac{9}{2}\right) = 1$$

$P_{00} = 2/9$, $P_{01} = 2/9$, $P_{11} = 1/9$; $P_{10} = 3/9$, $P_{1'1} = 1/9$

a) % clientes perdidos $= 1 - 2/9 - 2/9 = 5/9 \simeq 0{,}55$

(em $2/3 \simeq 0{,}67$)

(em $2/3$)

b) $L = 1 \cdot 5/9 + 2 \cdot 2/9 = 1$ $\lambda = 1/\text{hora}$

c) $W = \dfrac{L}{\lambda \cdot (2/9 + 2/9)} = \dfrac{1}{4/9} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$ horas (em 2 horas)

ii) $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\lambda = 2/\text{hora}$

$$P_{00}\left(1 + 2 + 4 + 2 + 2\right) = P_{00}(11) = 1 \Rightarrow P_{00} = 1/11$$

$P_{00} = 1/11$, $P_{01} = 2/11$, $P_{11} = 2/11$, $P_{10} = 4/11$, $P_{1'1} = 2/11$

a) % clientes perdidos $= 1 - 1/11 - 2/11 = 1 - 3/11 = 8/11 \simeq 73\%$ (em $4/5 = 80\%$)

b) $L = 1 \cdot 6/11 + 2 \cdot 4/11 = 14/11 \simeq 1{,}27$ (em $4/5 = 0{,}8$)

c) $W = \dfrac{\cancel{14}^{7}/\cancel{11}}{\cancel{2}(3/\cancel{11})} = \dfrac{7}{3} = 2{,}33$ hs (em 2 hs)

Gargalo na Cadeira 1 ou 2?

i) $\lambda = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$

$$P_{00}\left(\overset{00}{1} + \overset{01}{\frac{1}{2}} + \overset{10}{\frac{4}{3}} + \overset{11}{\frac{1}{6}} + \overset{b1}{\frac{1}{12}}\right) = 1$$

$$P_{00}\left(\frac{12+6+16+2+1}{12}\right) = 1$$

$$P_{00}\left(\frac{37}{12}\right) = 1 \Rightarrow P_{00} = \frac{12}{37}$$

$P_{01} = 6/37,\ P_{10} = \frac{16}{37},\ P_{11} = 2/37,\ P_{11} = 1/37$

a) $\%\text{perdidos} = 1 - \frac{18}{37} = \frac{19}{37}$

$\approx 51{,}3\%$

b) $L = \frac{22}{37} + \frac{6}{37} = \frac{28}{37}$

c) $W = \frac{28/37}{1 \cdot 18/37} = \frac{28}{18}$

ii) $\lambda = 1,\ \mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$

$$P_{00}\left(1 + 1 + \frac{4}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 1$$

$$P_{00}\left(\frac{12+4+2+4}{6}\right) = P_{00}\left(\frac{22}{6}\right) = P_{00}\left(\frac{11}{6}\right) = 1$$

$$\Rightarrow P_{00} = \frac{3}{11}$$

③ Fila com 2 tipos de serviços

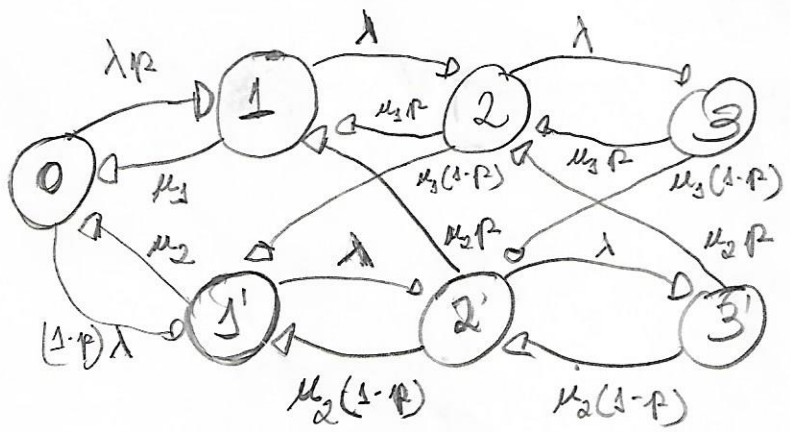
Fila única com chegadas de acordo com processo de Poisson com taxa λ. Cada cliente pode escolher um dentre 2 tipos de serviços. Tempo de serviço do tipo I é exponencial com parâmetro μ_1, tempo de serviço do tipo II é exponencial com parâmetro μ_2. Cada cliente pode escolher serviço I ou II com prob. p e $(1-p)$ respectivamente (exemplos: em uma barbearia, cliente pode escolher fazer cabelo ou barba; em um posto de gasolina, cliente pode querer gasolina ou reparo mecânico; em uma agencia de correio, cliente pode querer selos ou enviar sedex, etc).

Estados

0 = sistema vazio

n = n clientes no sistema e o primeiro escolheu serviço tipo

n' = n " " " " " " " " " I



Estado	Sai = Entra
0	$\lambda P_0 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_{1'}$
1	$(\lambda+\mu_1) P_1 = \lambda p P_0 + \mu_1 p P_2 + \mu_2 p P_{2'}$
$1'$	$(\lambda+\mu_2) P_{1'} = \lambda(1-p) P_0 + \mu_2(1-p) P_{2'} + \mu_1(1-p) P_2$
n	$(\lambda+\mu_1) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu_1 p P_{n+1} + \mu_2 p P_{n+1'}$
n'	$(\lambda+\mu_2) P_{n'} = \lambda P_{n-1'} + \mu_1(1-p) P_{n+1} + \mu_2(1-p) P_{n+1'}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n'} = 1$$

Na prática [illegible] N [illegible] quando um client

Na prática, escolheríamos N grande e assumiríamos que quando um cliente em potencial chega e encontra N clientes no sistema ele vai embora.

Condição de equilíbrio:

Tempo esperado de serviço de um cliente: $\dfrac{p}{\mu_1} + \dfrac{(1-p)}{\mu_2}$

Tempo esperado entre chegadas: $\dfrac{1}{\lambda}$

$$\frac{p}{\mu_1} + \frac{(1-p)}{\mu_2} < \frac{1}{\lambda} \rightarrow \text{condição de equilíbrio}$$

No exemplo acima:

a) $L = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(P_n + P_{n'}\right)$

b) $W = L/\lambda = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} n\left(P_n + P_{n'}\right)}{\lambda}$

c) proporção do tempo que sistema tem pelo menos um cliente $= 1 - P_0$

Outra forma:

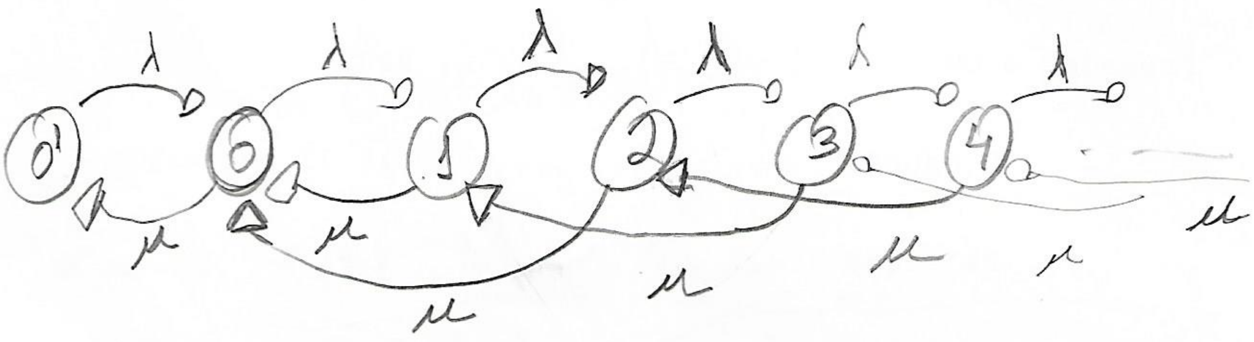
estado = número de pessoas na fila

Estado

$0'$ — nenhum cliente sendo servido (fila vazia, servidor livre)

0 — servidor ocupado, fila vazia (fila vazia, servidor ocupado com 1 ou 2)

n — n clientes na fila $(n>0)$



	sai	entra
$0'$	$\lambda P_{0'}$	$= \mu P_0$
0	$(\mu+\lambda) P_0$	$= \mu P_1 + \mu P_2 + \lambda P_{0'}$
$n \geq 1$	$(\lambda+\mu) P_n$	$= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}$

$$P_n = \frac{\alpha^n \lambda (1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}, \quad P_{0'} = \frac{\mu(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{1+4\lambda/\mu} - 1}{2}$$

Condição de equilíbrio: $\alpha < 1 \Longleftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 2$

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda \alpha}{(1-\alpha)(\lambda+\mu(1-\alpha))}, \quad W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu}, \quad L = \lambda W$$

$$(\alpha-1)(a\alpha^2+b\alpha+c)=\mu\alpha^3-(\lambda+\mu)\alpha+\lambda$$
$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha-a\alpha^2-b\alpha-c=$$
$$a\alpha^3+(b-a)\alpha^2+(c-b)\alpha-c$$

$b=a=\mu$

$c=-\lambda$

$$P_n=\alpha^n P_0$$

$$(\lambda+\mu)\alpha^n\cancel{P_0}=\lambda\alpha^{n-1}\cancel{P_0}+\mu\alpha^{n+2}\cancel{P_0}$$

$$(\alpha-1)(\mu\alpha^2+\mu\alpha-\lambda)=$$
$$\mu\alpha^3-\alpha(\lambda+\mu)+\lambda$$

$$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda+\mu\alpha^3 \Rightarrow$$

$$\mu\alpha^2+\mu\alpha-\lambda=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2+\alpha-\frac{\lambda}{\mu}=0}$$

$$\mu\alpha^3-\alpha(\lambda+\mu)+\lambda=0 \rightarrow 3 \text{ raízes}$$

$$\alpha=1 \Rightarrow \mu-(\lambda+\mu)+\lambda=0$$ ($P_n \neq P_0$ não seria)

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2}, \quad \alpha=\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2} \leftarrow$$

negativo

Logo, $P_n=\alpha^n P_0$ $\qquad P_{0'}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1 \Rightarrow$

$$P_{0'}=\frac{\mu}{\lambda}P_0 \qquad P_0\left(\frac{\mu}{\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\right)=1$$

$$\alpha<1 \Leftrightarrow -1+\sqrt{1+4\lambda/\mu}<2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+4\lambda/\mu}<3 \Leftrightarrow 1+4\lambda/\mu<9 \Leftrightarrow 4\lambda/\mu<8$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu}<2$$

Nesse caso, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$

$$P_0\left(\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{1-\alpha}\right) = P_0\left(\frac{\mu(1-\alpha)+\lambda}{\lambda(1-\alpha)}\right) = 1$$

$$P_0 = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)}$$

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\alpha^n \lambda(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)}, & n=0,1,\ldots \\[2ex] P_{0'} = \dfrac{\mu(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Daí teremos que

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda+\mu(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$$

$$= \frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)\left[\lambda+\mu(1-\alpha)\right]}$$

$$\begin{cases} W_Q = \dfrac{L_Q}{\lambda} \\[2ex] W = W_Q + \dfrac{1}{\mu} \\[2ex] L = \lambda W \end{cases}$$

$$(n=0) \quad (\mu+\lambda)\cancel{P_0} = \overbrace{\mu\alpha\cancel{P_0}}^{P_1} + \overbrace{\mu\alpha^2\cancel{P_0}}^{P_2} + \overbrace{\cancel{\lambda}\frac{\mu}{\cancel{\lambda}}P_0}^{P_0'}$$

$$(\cancel{\mu}+\lambda) = \mu\alpha + \mu\alpha^2 + \cancel{\mu}$$

$$\mu\alpha^2 + \mu\alpha - \lambda = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - \frac{\lambda}{\mu} = 0$$

$$\alpha^3 - \alpha(1 + \lambda/\mu) + \lambda/\mu = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + a\alpha + b) = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha - \alpha^2 - a\alpha - b$$

$$= \alpha^3 + (a-1)\alpha^2 + (b-a)\alpha - b$$

$$0 = a - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\overset{1}{\cancel{a}} - b = \cancel{1} + \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \Rightarrow b = -\lambda/\mu$$

$$\alpha^3 - \alpha(1 + \lambda/\mu) + \lambda/\mu = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - \lambda/\mu) = 0$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda/\mu}}{2}$$

Exemplo: $\lambda = 1/4$ mins, $\mu = 1/3$ mins $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$

$$\alpha = \frac{-1 \mp \sqrt{1+4 \cdot \frac{3}{4}}}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1+3}}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\cancel{8}_{2}\left(\frac{3+2}{\cancel{12}_{3}}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{10}\right), \; n = 0, 1,$$

$$P_0 = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5}$$

$$L_Q = \frac{\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+2/3} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$W_Q = \frac{3/5}{1/4} = \frac{12}{5} \text{ mins} \approx 2{,}4 \text{ mis}$$

$$W = \frac{12}{5} + 3 = 5{,}4 \text{ mins} = \frac{27}{5} \text{ mins}$$

$$L = \frac{27}{20} = 1{,}35$$

(4) Fila com capacidade de atender vários clientes

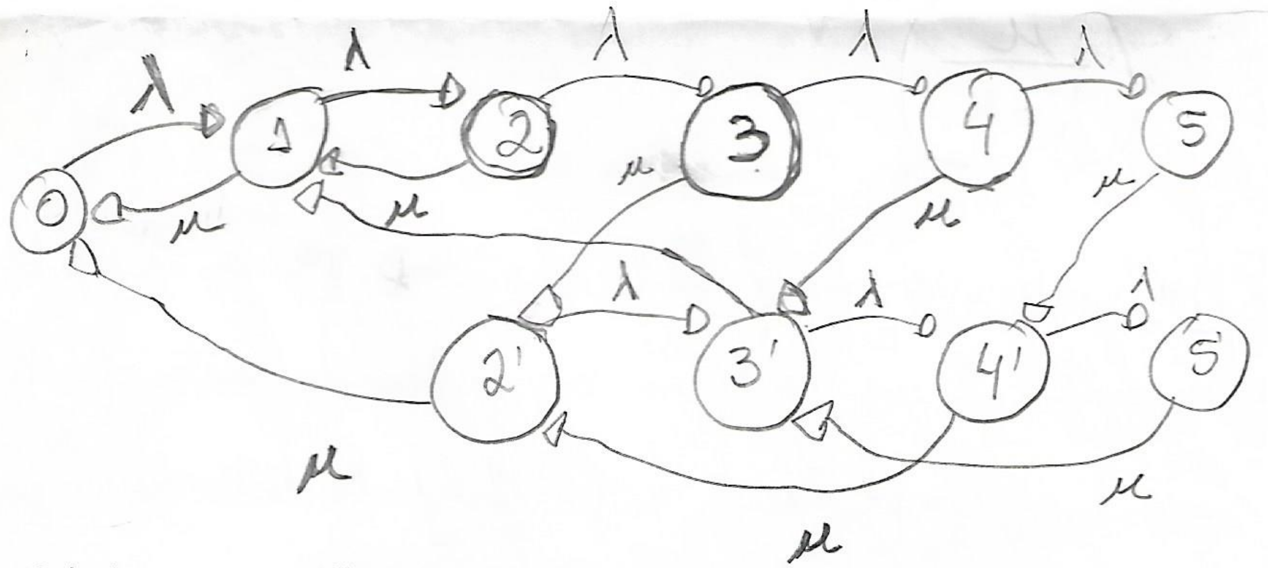
Considere uma fila com um servidor com capacidade de atender até 2 clientes ao mesmo tempo. Quando o serviço termina, ele atende os 2 próximos. Se houver apenas 1 cliente, ele o atende. Considerando tempo de serviço exponencial com parâmetro μ e chegadas de acordo com um processo de Poisson com taxa λ (Exemplo: elevador que pode pegar no máximo 2 passageiros).

Estado

0 = sistema vazio

n = n clientes no sistema e um em serviço $(n \geq 1)$

n' = " " " " " 2 em serviço $(n' \geq 2)$



Estado	Sai	=	Entra
0	λP_0	=	$\mu P_1 + \mu P_{2'}$
1	$(\lambda+\mu) P_1$	=	$\lambda P_0 + \mu P_2 + \mu P_{3'}$
2	$(\lambda+\mu) P_2$	=	λP_1
2'	$(\lambda+\mu) P_{2'}$	=	$\mu P_3 + \mu P_{4'}$
n	$(\lambda+\mu) P_n$	=	λP_{n-1}
n'	$(\lambda+\mu) P_{n'}$	=	$\mu P_{n+1} + \mu P_{(n+2)'} + \lambda P_{(n-1)'}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n'} = 1$$

Resolução por computador truncando para N suficientemente grande.

24ª aula — Qual é a probabilidade de um cliente ser servido sozinho para $t \to \infty$? Vamos calcular este valor esperado condicionando no estado do sistema quando o cliente chega.

i) Estado 0 quando o cliente chega $\Rightarrow$ vai ser atendido sozinho.

ii) Estado $2K$ $(K \geq 1)$ quando o cliente chega $\Rightarrow$ não vai ser atendido sozinho (exemplo: 8 pessoas no sistema, com 1 sendo servido $\Rightarrow$ 7 na fila e com + uma chegada, 8 $\Rightarrow$ 4 pares de 2) (completou um par)

iii) Estado $2K+1$ quando o cliente chega $\Rightarrow$ vai ser atendido sozinho se e somente se nenhuma nova chegada antes de $K+1$ serviços consecutivos completados; a probabilidade disto ocorrer é:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{K+1}$$

iv) Estado $(2K)'$, $K \geq 1$ quando o cliente chega $\Rightarrow$ vai ser atendido sozinho se e somente se nenhuma nova chegada antes de K serviços consecutivos completados; a probabilidade disto ocorrer é:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{K}$$

v) Estado $(2n+1)'$, quando o cliente chega $\Rightarrow$ não vai ser atendido sozinho (completou um par).

$$P(\text{ser atendido sozinho}) = 1\, P_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n+1} P_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n} P_{(2n)'}$$

— || —

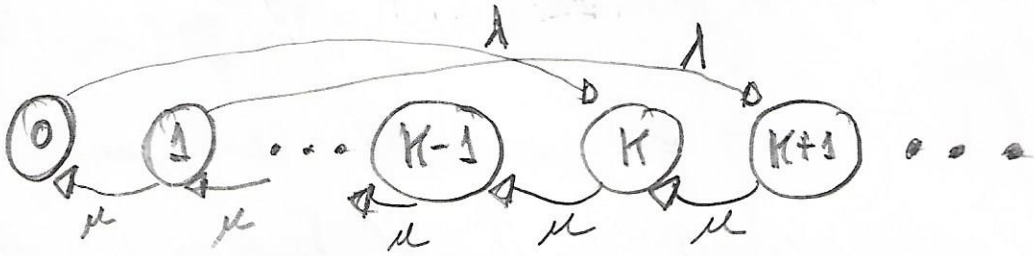
(5) Fila com tempo de serviço com distribuição gama

Considere uma fila com chegadas de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Tempos de serviço independentes com distribuição gama (n, μ), isto é, com função densidade de probabilidade

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0.$$

Qual é tempo médio gasto por um cliente no sistema e o número médio de clientes no sistema?

<ins>Chave</ins>: Distribuição gama corresponde à soma de variáveis exponenciais (gama $(K, \mu) \Leftrightarrow$ soma de K variáveis exponenciais, cada uma com parâmetro μ). Chegada equivale a K unidades cada uma servida com um tempo exponencial com parâmetro μ



$$E\left(\text{tempo gasto no sistema} \mid n \text{ unidades no sistema na chegada}\right) = \frac{n}{\mu} + \frac{K}{\mu}$$

$$W = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+K\right)P_n = \frac{L_a}{\mu} + \frac{K}{\mu} \quad , \quad L_a = \sum_{n=0}^{\infty} n\,P_n$$

$$L_a = \frac{\lambda K(K+1)}{2(\mu-\lambda K)} \Rightarrow W = \frac{\lambda K(K+1)}{2\mu(\mu-\lambda K)} + \frac{K}{\mu} = \frac{K}{\mu}\left(\frac{\lambda(K+1) + 2(\mu-\lambda K)}{2(\mu-\lambda K)}\right)$$

$$W = \frac{K}{\mu}\left(\frac{2\mu - \cancel{2}\lambda K + \cancel{\lambda K} + \lambda}{2(\mu-\lambda K)}\right) = \frac{K}{\mu}\left(\frac{2\mu - \lambda(K-1)}{2(\mu-\lambda K)}\right)$$

$$L = \lambda W = \frac{K\lambda}{\mu}\left(\frac{2\mu-\lambda(K-1)}{2(\mu-\lambda K)}\right)$$

Condição de equilíbrio: $\mu - \lambda K > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} > \frac{K}{\mu}$