Teorema (ARE - Controle):

i) Se (A, B) é estabilizável então existe $S \geq 0$ solução da ARE.

ii) Se além disso o par $(\hat{D}, \hat{A})$ é detectável, onde

$$\hat{A} = A - B(F'F)^{-1}F'D, \quad \hat{D} = \left(I - F(F'F)^{-1}F'\right)D$$

então

ii.1) S é a única solução da ARE positiva semi-definida

ii.2) $A - BM$ é estável, onde

$$M = (B'SB + F'F)^{-1}(B'SA + F'D)$$

ii.3) $S_T(0) \xrightarrow{T \to \infty} S$ para qualquer $S_T(T) = Q \geq 0$

Vamos ver a prova para o caso

i) (A,B) estabilizável

ii) $F'D=0$, e (D,A) é observável. $\Rightarrow \underline{\underline{S>0}}$

Prova: Consideramos $W_H = 0$ e $S(T)=0$.
Considere o problema

(1)
$$\min_{u_0,\dots,u_{T-1}} \sum_{k=0}^{T-1}\left(\|Dx_k\|^2+\|Fu_k\|^2\right)$$

$\underline{\underline{Q=0}}$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Segue que com $Q=0$

$$x_0' S_T^0(0)\, x_0 = \min_{u_0,\dots,u_{T-1}} \sum_{k=0}^{T-1}\left(\|Dx_k\|^2+\|Fu_k\|^2\right) \le$$

$$\min_{u_0,\dots,u_T} \sum_{k=0}^{T}\left(\|Dx_k\|^2+\|Fu_k\|^2\right) = x_0' S_{T+1}^0(0)\, x_0$$

Logo, $S_T^0(0) \le S_{T+1}^0(0)$.

Como (A,B) é estabilizável, existe

K tal que $A+BK$ é estável, e escolhendo

$\bar{u}_k = K \bar{x}_k$ onde definimos $\bar{x}_{k+1} = (A+BK)\bar{x}_k$

$$x_0' S_T^0(0) x_0 \leq \sum_{k=0}^{T-1} \left(\|D\bar{x}_k\|^2 + \|FK\bar{x}_k\|^2 \right)$$

$$\leq \left(\|D\|^2 + \|FK\|^2 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2$$

$\leq \alpha \|x_0\|^2$

Logo, $S_T^0(0) \leq d\,I$ e segue que

$S_T^0(0) \uparrow S$ quando $T \to \infty$.

Temos também que

$$\begin{cases} S_T^0(1) = S_{T-1}^0(0) \\ S_T^0(0) = A' S_T^0(1) A + D'D - (A' S_T^0(1) B)(B' S_T^0(1) B + D'D)^{-1}(A' S_T^0(1) B)' \\ \quad = A' S_{T-1}^0(0) A + D'D - (A' S_{T-1}^0(0) B)(B' S_{T-1}^0(0) B + D'D)(A' S_{T-1}^0(0) B)' \end{cases}$$

Fazendo $T \to \infty$ obtemos que $S \geq 0$ satisfaz a ARE de controle

11.2) Estabilidade : (D,A) observável.

$$M = (B'SB + F'F)^{-1} B'SA$$

$$x_{n+1} = (A - BM)x_n$$

Mostraremos que $x_n \to 0$ para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Sabemos que

$$S = (A-BM)'S(A-BM) + D'D + M'F'FM \Rightarrow$$

$$x_n' S x_n - \underbrace{x_n'(A-BM)'}_{x_{n+1}'} S \underbrace{(A-BM)x_n}_{x_{n+1}} = \|Dx_n\|^2 + \|FMx_n\|^2$$

$$x_n' S x_n - x_{n+1}' S x_{n+1} = \|Dx_n\|^2 + \|FMx_n\|^2$$

$$x_T' S x_T - x_0' S x_0 = \sum_{k=0}^{T-1} \left(x_{n+1}' S x_{n+1} - x_n' S x_n \right) =$$

$$-\sum_{n=0}^{T-1} \left(\|Dx_n\|^2 + \|FMx_n\|^2 \right) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\|Dx_n\|^2 + \|FMx_n\|^2 \right) \leq x_0' S x_0$$

Logo, $\begin{cases} \|Dx_H\| \longrightarrow 0 \\ \|Mx_H\| \longrightarrow 0 \quad \text{pois } F'F > 0 \end{cases}$

Temos que $x_{H+1} = Ax_H + Bu_H$, $u_H = -Mx_H$

$$x_{H+t} = A^t x_H + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} B u_{H+i}$$

Logo, $t = 1, \ldots, n-1$

$$A^t x_H = x_{H+t} + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} BMx_{H+i}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} DA^{n-1} \\ \vdots \\ DA \\ D \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} x_H = \begin{pmatrix} D\left(\underline{x_{H+n-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-2-i} B\underline{Mx_{H+i}}\right) \\ \vdots \\ D\left(\underline{x_{H+1}} + BM\underline{x_H}\right) \\ D\underline{x_H} \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{H \to \infty} 0$ pois $Dx_H \to 0$

$Mx_H \to 0$

Logo,

$$\underbrace{x_k' \theta' \theta x_k}_{\|\theta x_k\|^2} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Como $\theta'\theta \geq \varepsilon I$ pois θ é full rank, segue que $\|x_k\|^2 \xrightarrow{k \to \infty} 0$, ou seja, $x_k \to 0$, qualquer que seja x_0.

—— X ——

Prova que $S > 0$: Por contradição, existe $x_0 \neq 0$ tal que $x_0' S x_0 = 0$.

Logo,

$$\overset{\geq 0}{x_T' S x_T} - \cancel{x_0' S x_0}^{0} = \overbrace{-\sum_{k=0}^{T-1} \left(\|D x_k\|^2 + \|FM x_k\|^2\right)}^{\leq 0}$$

$\Rightarrow D x_k = 0$, $M x_k = 0$ para todo k.

Pela equação anterior,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} DA^{n-1} \\ \vdots \\ DA \\ D \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} x_0 = 0$$ contrariando o fato de $\mathcal{O}$ ser full rank!

— X —

u.3) $S_T(0) \xrightarrow{T\to\infty} S$ para qualquer $Q \geq 0$.

Sabemos que

$$x_0' S_T(0) x_0 = \min_{u_0, \dots, u_{T-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \left(\|D x_k\|^2 + \|F u_k\|^2 \right) + x_T' Q x_T \right\}$$

$$\geq x_0' S_T^0(0) x_0 \quad \text{pois } Q \geq 0.$$

Considere o controle $u_k' = -M x_k$

$$x_{k+1} = (A - BM) x_k = (A-BM)^{k+1} x_0$$

Segue que

$$x_0' S_T(0) x_0 \leq \sum_{k=0}^{T-1} \left(\|D(A-BM)^k x_0\|^2 + \|FM(A-BM)^k x_0\|^2 \right) + x_0' \left((A-BM)^T\right)' Q \left((A-BM)^T\right) x_0$$

$$= x_0' \left\{ (A-BM)^{T'} Q (A-BM)^T + \sum_{k=0}^{T-1} (A-BM)^{k'} (D'D + M'F'FM) \cdot (A-BM)^k \right\} x_0 = x_T' Q x_T + \sum_{k=0}^{T-1} \left(\|Dx_k\|^2 + \|FMx_k\|^2 \right)$$

- $(A-BM)^{T'} Q (A-BM)^T \xrightarrow{T \to \infty} 0$ pois $(A-BM)$ é estável

  $x_T' Q x_T \xrightarrow{T\to\infty} 0$

- $$\sum_{k=0}^{T-1} \left(\|Dx_k\|^2 + \|FMx_k\|^2 \right) = x_0' S x_0 - x_T' S x_T$$

  $\to 0$

  $\xrightarrow{T\to\infty} x_0' S x_0$

- $S_T^0(0) \xrightarrow{T\to\infty} S$

Logo, $x_0' S x_0 \le \lim_{T\to\infty} x_0' S_T(0) x_0 \le x_0' S x_0$

ou seja, $\lim_{T\to\infty} S_T(0) = S$.

— X —

(9)

III.1) $\bar{S}$ é única solução ≥ 0 para ARE

Suponha que $\tilde{S} \geq 0$ é outra solução.

Logicamente, fazendo $Q = \tilde{S}$,

$$S_T(0) = \tilde{S}$$

e portanto

$$S = \lim_{T \to \infty} S_T(0) = \tilde{S}.$$

— X —