PTC 5720 - Controle Estocástico - 3ª Lista

1ª Questão: Considere um jogo com 40 palitos de fósforo. Em cada jogada jogadores A e B podem tirar de forma alternada 1,2,3 ou 4 palitos de fósforo e perde o jogo quem tirar o último. Jogador A começa jogando. Existe uma estratégia que garanta a vitória do jogador A? Caso exista, determine essa estratégia.

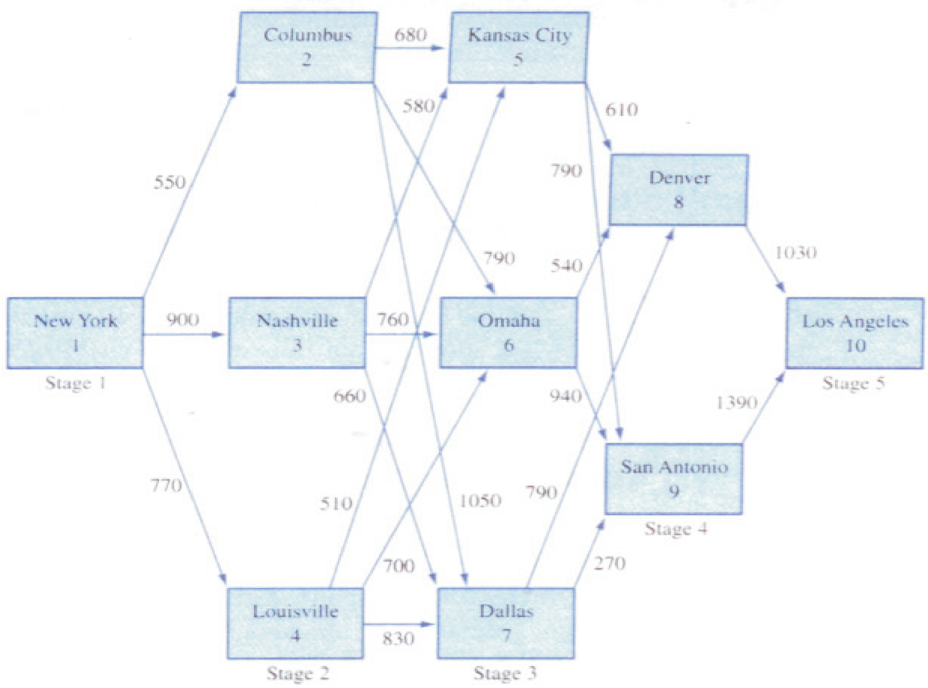
2ª Questão: Um jogador entra em um jogo onde pode, a cada instante k jogar uma quantia $u_k \geq 0$ que não exceda sua fortuna atual x_k (capital inicial mais os ganhos ou menos as perdas até o instante k). Ele ganha o que apostou com probabilidade p, onde $\frac{1}{2} < p < 1$, e perde o que apostou com probabilidade $1-p$. Determine a estratégia de jogo que maximize $E(ln(x_N))$, onde x_N representa a fortuna no instante N.

3ª Questão:) Considere um modelo financeiro discreto com $n = 1$, $T = 2$, taxa de juros constante r_f, conforme abaixo:

ω	$t=0$	$t=1$	$t=2$	p_i
ω_1	$S(0)=3$	$S(1)=5$	$S(2)=8$	$\frac{1}{4}$
ω_2	$S(0)=3$	$S(1)=5$	$S(2)=4$	$\frac{1}{4}$
ω_3	$S(0)=3$	$S(1)=2$	$S(2)=4$	$\frac{1}{4}$
ω_4	$S(0)=3$	$S(1)=2$	$S(2)=1$	$\frac{1}{4}$

Considere a função utilidade $u(v) = ln(v)$ e $r_f = \frac{1}{9}$. Através de programação dinâmica, obtenha a solução do problema de otimização de carteira para este modelo.

4ª Questão: Determine o caminho mínimo para o gráfico abaixo.



5ª Questão: Um submarino a uma velocidade constante pode ser modelado, após uma discretização no tempo, pelas equações

$$\begin{pmatrix} W(k+1) \\ q(k+1) \\ \theta(k+1) \\ h(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.88 & 1.388 & -0.006 & -0.002 \\ -0.001 & 0.535 & -0.003 & -0.002 \\ 0 & 1.488 & 0.993 & -0.002 \\ 1.877 & -4.999 & -7.982 & 1.005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(k) \\ q(k) \\ \theta(k) \\ h(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.011 & -0.22 \\ 0.083 & -0.024 \\ 0.092 & -0.026 \\ -0.296 & -0.144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta b(k) \\ \delta s(k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(k) \\ q(k) \\ \theta(k) \\ h(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \xi_3(k) \\ \xi_4(k) \end{pmatrix}$$

onde $\xi(k)$ é um ruído branco de média nula e variância unitária. Considere condições iniciais com média nula e matriz de covariância identidade. Para as simulações do sistema real gere condições iniciais usando uma distribuição normal. Deseja-se minimizar o funcional

$$J(\delta b, \delta s) = \sum_{k=0}^{100} E(10\, y_3(k)^2 + \delta b(k)^2 + \delta s(k)^2).$$

a) Determine a política ótima assumindo conhecido o vetor de estado (W, q, θ, h). Trace um gráfico das variáveis de estado ao longo do tempo do sistema quando esta política de controle ótimo é aplicada.

b) Repita o item a), considerando agora que somente o vetor de observações $y(k)$ seja conhecido. Compare o resultado obtido com o item a).

c) Repita os itens anteriores usando o filtro de Kalman e controle ótimo estacionários.

6ª Questão: Considere o problema de minimização

$$E\Big(\sum_{k=0}^{N-1} u(k)^2 + (x(N) - b)^2\Big)$$

para o sistema de controle escalar

$$x(k+1) = ax(k) + u(k) + w(k),\ x(0) = 0.$$

Aqui $u(k)$ representa o controle, $w(k)$ uma sequência de ruído branco com média nula e variância σ^2.

a) Aplique programação dinâmica para mostrar que a função valor $V_k(x)$ tem a seguinte forma:

$$V_k(x) = p(k)x^2 + 2q(k)x + r(k).$$

Como são determinados $p(k)$, $q(k)$, $r(k)$? Qual é o valor do controle ótimo em termos desses parâmetros?

b) Introduzindo a nova variável de estado

$$z(k) = x(k) - b$$

mostre que o problema acima pode ser escrito como um problema padrão de controle ótimo. Deduza o controle ótimo a partir desta formulação e compare com a obtida no item a).

7ª Questão: Uma máquina pode estar em 2 estados, representados pela cadeia de Markov oculta X_k no início do dia k: Estado 1 - Perfeitas Condições, e Estado 2 - Condições Impróprias. Estando no estado 1, a probabilidade de permanecer nesse estado no dia seguinte é 0,85. Estando no estado 2, ela permanecerá nesse estado com probabilidade 1. A máquina é inspecionada no início do dia, e o resultado da inspeção, denotado por S_k no dia k, pode ser: G - máquina em bom estado, ou B - máquina em mal estado. As probabilidades são: $p(G|1) = 0.98$, $p(G|2) = 0.8$. Foram observados os seguintes estados de inspeção em 3 dias: $S_1 = G$, $S_2 = B$, $S_3 = G$. Suponha que a probabilidade da máquina estar no estado 1 no dia 1 seja $0,7$. Determine:

(i) A probabilidade da máquina estar no estado 1 ($X_3 = 1$) quando a 3a inspeção foi realizada.

ii) A probabilidade de $X_4 = 1$.

iii) A probabilidade de $S_4 = G$.

iv) Aplique o algoritmo de Viterbi e determine a solução do problema

$$\max_{x_1, x_2, x_3},\ P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3 | S_1 = G, S_2 = B, S_3 = G).$$

8ª Questão: Considere agora que no exercício 7 uma ação de controle U_k possa ser tomada no início do dia k. Ação C não faz nada e a ação S realiza uma inspeção detalhada e caso a máquina esteja no estado 2 faz um reparo que a deixa como nova (estado 1) no início do dia k. Considere os seguintes custos $g(X_k, U_k)$: $g(1, C) = 0$, $g(1, S) = 1$, $g(2, C) = 2$, $g(2, S) = 1$. Obtenha a estratégia ótima U_k para minimizar $E(g(X_1, U_1) + g(X_2, U_2))$. Qual é o valor do custo mínimo ótimo?