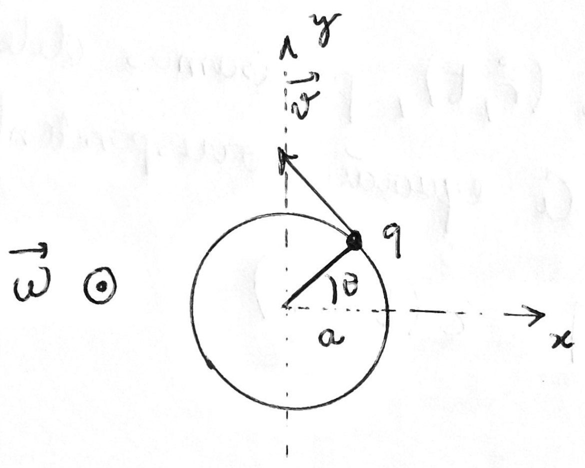
Exercício :

Uma partícula de carga q se move num círculo de raio a com velocidade angular constante ω. Assuma que o círculo está no plano xy, centrado na origem e que em $t=0$ a carga está na posição $(a,0)$.

Determine os potenciais de Liénard - Wiechert para pontos sobre o eixo z.

Solução



Vimos na aula anterior que o potencial escalar de Liénard - Wiechert para uma carga pontual q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ é dado por

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r - \vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

onde $\vec{v} = \vec{v}(t_r)$ é a velocidade da carga no instante retardado

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{w}(t_r).$$

Para pontos sobre o eixo z : $\vec{r} = z\hat{z}$

a posição da partícula $\vec{w}(t)$ num instante qualquer é

$$\vec{w}(t) = a\cos(\omega t + \phi)\,\hat{x} + a\sin(\omega t + \phi)\,\hat{y}$$

$$\vec{w}(0) = a\hat{x} \Rightarrow \phi = 0$$

Então

$$\vec{w}(t) = a\cos(\omega t)\,\hat{x} + a\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

Para um dado par $(\vec{r}, t)$, precisamos determinar o tempo retardado t_r. a equação correspondente é

$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r)$$

Portanto

$$|z\hat{z} - a\cos(\omega t_r)\,\hat{x} - a\sin(\omega t_r)\,\hat{y}| = c(t - t_r)$$

$$(a^2 + z^2)^{1/2} = c(t - t_r) \Rightarrow t_r = t - \frac{(a^2+z^2)^{1/2}}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\mathscr{r}} = z\hat{z} - a\cos\left[\omega\left(t - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{c}\right)\right]\hat{x} - a\sin\left[\omega\left(t - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{c}\right)\right]\hat{y}$$

A velocidade da carga é

$$\vec{v} = \dot{\vec{w}}(t) = -\omega a \sin(\omega t)\hat{x} + \omega a \cos(\omega t)\hat{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}(t_r) = -\omega a \sin\left[\omega\left(t - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{c}\right)\right]\hat{x} + \omega a \cos\left[\omega\left(t - \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{c}\right)\right]\hat{y}$$

Dessa forma, para pontos sobre o eixo z

$$\vec{\mathscr{r}} \cdot \vec{v}(t_r) = 0 \Rightarrow V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$

Então

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

O correspondente potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r},t)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+z^2)^{1/2}}\frac{\omega a}{c^2}\left[-\sin(\omega t_r)\hat{x} + \cos(\omega t_r)\hat{y}\right]$$

com $t_r = t - \dfrac{(a^2+z^2)^{1/2}}{c}$

Determine também os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associados

O campo elétrico $\vec{E}$ é a soma do campo de velocidade com o campo de aceleração

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3}(c^2 - v^2)\vec{u}}_{\text{campo de velocidade}} + \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3}\vec{r}\times(\vec{u}\times\vec{a})}_{\text{campo de aceleração}}$$

com $\vec{u} = c\hat{r} - \vec{v}$ e $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{r}\cdot\vec{u} = \vec{r}\cdot(c\hat{r} - \vec{v}) = rc = c(a^2+z^2)^{1/2}$$

$$v^2 = \omega^2 a^2$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 a\left[\cos(\omega t_r)\hat{x} + \sin(\omega t_r)\hat{y}\right]$$

$$\vec{u} = \frac{c}{r}\left[z\hat{z} - a\cos(\omega t_r)\hat{x} - a\sin(\omega t_r)\hat{y}\right]$$

$$- \left[-\omega a\sin(\omega t_r)\hat{x} + \omega a\cos(\omega t_r)\hat{y}\right]$$

$$\vec{r}\times(\vec{u}\times\vec{a}) = \vec{u}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{a})}_{\omega^2 a^2} - \vec{a}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{u})}_{= rc} = \omega^2 a^2\vec{u} - rc\,\vec{a}$$

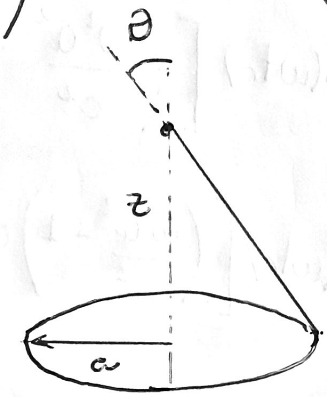
Então

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{(rc)^3}\left\{(c^2 \cancel{- v^2})\vec{u} + \cancel{\omega^2 a^2 \vec{u}} - rc\vec{a}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+z^2}\frac{1}{c^3}\left\{c^2\vec{u} - rc\vec{a}\right\}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2+z^2}\left\{\left[\left(\frac{\omega^2 a r}{c^2} - \frac{a}{r}\right)\cos(\omega t_r) + \frac{\omega a}{c}\sin(\omega t_r)\right]\hat{x}\right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\omega^2 a r}{c^2} - \frac{a}{r}\right)\sin(\omega t_r) - \frac{\omega a}{c}\cos(\omega t_r)\right]\hat{y} + \underbrace{\left(\frac{z}{r}\right)}_{= \cos\theta = cte}\hat{z}\right\}$$



No centro do círculo, $z = 0$ e $r = a$, temos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}\left\{\left[\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2} - 1\right)\cos(\omega t_r) + \frac{\omega a}{c}\sin(\omega t_r)\right]\hat{x}\right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2} - 1\right)\sin(\omega t_r) - \frac{\omega a}{c}\cos(\omega t_r)\right]\hat{y}\right\}$$

No limite não-relativístico : $\frac{\omega a}{c} \ll 1$

$$\vec{E} \xrightarrow{\frac{\omega a}{c} \ll 1} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}\left\{\cos(\omega t_r)\hat{x} + \sin(\omega t_r)\hat{y}\right\}$$

Também vimos que o campo magnético é dado por (6)

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}$$

No centro do círculo

$$\hat{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y} \quad e \quad \vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

então

$$\vec{B}(z=0) = \frac{1}{c} \left(\hat{r}_x E_y - \hat{r}_y E_x \right) \hat{z}$$

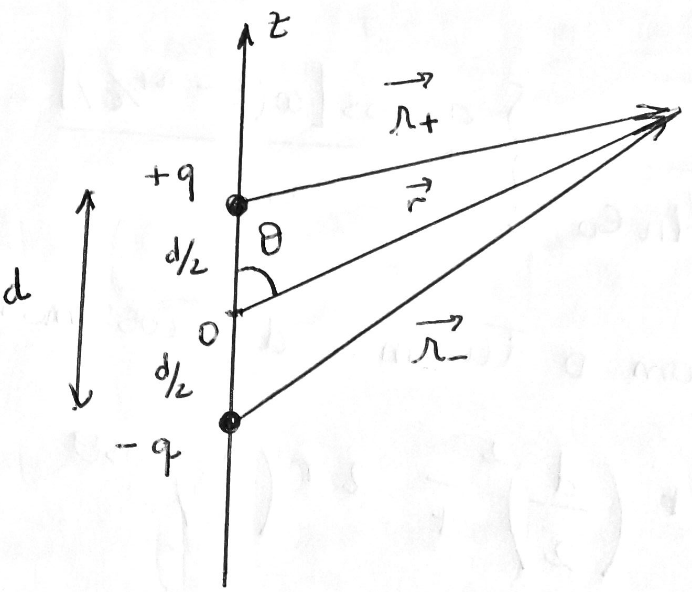
$$= -\frac{\hat{z}}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left\{ \cos(\omega t_r) \left[\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2} - 1 \right) \sin(\omega t_r) - \frac{\omega a}{c} \cos(\omega t_r) \right] - \sin(\omega t_r) \left[\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2} - 1 \right) \cos(\omega t_r) + \frac{\omega a}{c} \sin(\omega t_r) \right] \right\}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \left\{ -\frac{\omega a}{c} \cos^2(\omega t_r) - \frac{\omega a}{c} \sin^2(\omega t_r) \right\} \frac{1}{c} \hat{z}$$

logo

$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega}{a c^2} \hat{z}$$

Radiação de dipolo elétrico



O sistema acima é formado de duas cargas elétricas de sinais opostos $+q(t)$ e $-q(t)$, separadas por uma distância d. A carga flui de uma extremidade a outra por meio de um fio condutor.

Tomaremos o caso em que a carga q oscila harmonicamente no tempo com amplitude q_0

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Isso dá origem a um momento de dipolo

$$\vec{p}(t) = q_0 d \cos(\omega t)\,\hat{z} = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{z}$$

O potencial escalar no ponto $\vec{r}$ no instante t é então (8)

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{q_0 \cos[\omega(t - r_+/c)]}{r_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t-r_-/c)]}{r_-} \right\}$$

De acordo com o teorema dos cossenos

$$r_\pm^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp 2r\left(\frac{d}{2}\right)\cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$r_\pm = \left[r^2 \mp rd\cos\theta + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Estamos particularmente interessados em regiões distantes do dipolo, tais que

$$d << r$$

Nessa região:

$$r_\pm = r\left[1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right]^{1/2} \simeq r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

Bem como

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left[1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

Nessa região, podemos então escrever

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{r_\pm}{c}\right)\right] \simeq \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \pm \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right]$$

$$= \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \mp \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\sin\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right)$$

Além disso, tomaremos o caso em que o tamanho do dipolo (d) é muito menor que ~~o com~~ a escala c/ω

$$d \ll \frac{c}{\omega}$$

Portanto

$$\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \simeq 1 \quad e \quad \sin\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \simeq \frac{\omega d}{2c}\cos\theta$$

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{r_\pm}{c}\right)\right] \simeq \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mp \frac{\omega d}{2c}\cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V(\vec{r},t) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\left\{\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega d}{2c}\cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\right\} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\left\{\cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + \frac{\omega d}{2c}\cos\theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left\{-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] + \frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

Perceba que no limite $\omega \to 0$, recuperamos o resultado eletrostático

$$V(\vec{r},t) \xrightarrow{\omega \to 0} V(\vec{r}) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Na chamada zona de radiação, temos

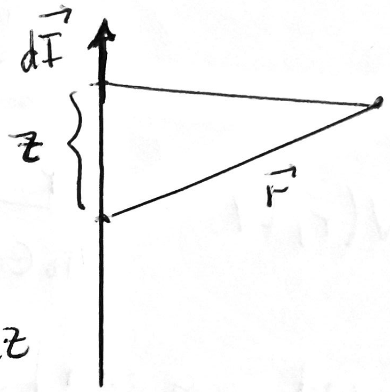
$$r \gg \frac{c}{\omega}$$

e, portanto

$$V(\vec{r},t) \simeq -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

Tratemos agora o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{\vec{I}(z,t_r)}{\mathscr{r}}\,dz$$



$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{-q_0\omega\sin\left[\omega\left(t-\mathscr{r}/c\right)\right]dz}{\mathscr{r}}$$

já que $\vec{I}(t) = \frac{dq}{dt}\hat{z} = -q_0\omega\sin(\omega t)$

De maneira similar ao cálculo anterior

$$\imath^2 = r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta \Rightarrow \imath \simeq r\left(1 - \frac{z}{r}\cos\theta\right)$$

$$\sin\left[\omega\left(t - \imath/c\right)\right] \simeq \sin\left[\omega\left(t - r/c\right) + \frac{\omega z}{c}\cos\theta\right]$$

$$= \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\cos\left(\frac{\omega z}{c}\cos\theta\right) + \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\sin\left(\frac{\omega z}{c}\cos\theta\right)$$

$z \ll c/\omega$

$$\simeq \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] + \frac{\omega z}{c}\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\cos\theta$$

Portanto

$$\vec{A}(\vec{r},t) \simeq -\frac{\mu_0 q_0 \omega}{4\pi}\hat{z}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{1}{r}\left(1 + \frac{z}{r}\cos\theta\right)\left\{\sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] + \frac{\omega z}{c}\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0 \omega}{4\pi}\frac{1}{r}\hat{z}\left\{\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\int_{-d/2}^{d/2}dz + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\omega}{c}\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\int_{-d/2}^{d/2}z^2\,dz\right\}$$

Na zona de radiação

$$\vec{A}(\vec{r},t) \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{z}$$

Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right) \left\{ -\frac{1}{r^2} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] - \frac{1}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right) \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}$$

$$= \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right) \left\{ \frac{1}{r^2} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] + \frac{1}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]$$

$$\Downarrow \quad r \gg \frac{c}{\omega} \quad \text{(zona de radiação)}$$

$$\vec{\nabla} V \cong \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{r} \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{r}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{z}$$

Como $\hat{z} = \cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \left(\cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}\right)$$

Portanto, podemos escrever na zona de radiação

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \left\{ \cancel{-\cos\theta\, \hat{r}} + \cancel{\cos\theta\, \hat{r}} - \sin\theta\, \hat{\theta} \right\}$$

$$\boxed{\vec{E} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{\theta}} \quad d \ll \lambda \ll r$$

com $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}$

Campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \hat{\phi}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \left(\cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \sin\theta$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r}\, \omega \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \sin\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0}{4\pi}\, \omega \sin\theta \, \frac{1}{r} \left\{ \frac{\omega \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]}{c} + \frac{1}{r} \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \right\} \hat{\phi}$$

Logo, na zona de radiação:

$$\boxed{\vec{B} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{\phi}} \quad (d \ll \lambda \ll r)$$

$$\boxed{\vec{E} \simeq -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{\theta}} \quad (d \ll \lambda \ll r)$$

Veja que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ na zona de radiação são perpendiculares entre si. e $|\vec{B}| = \dfrac{|\vec{E}|}{c}$

A energia irradiada pelo dipolo por unidade de área e tempo é dada pelo vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{r}$$

Percebo que $|\vec{S}| \propto \frac{1}{r^2}$ e, portanto, a energia pode ser detectada por um observador na zona de radiação

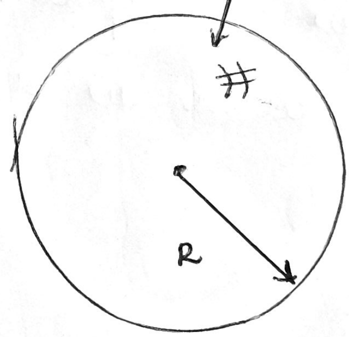
A intensidade da onda eletromagnética é a média no tempo de $\vec{S}$ sobre um ciclo completo de oscilação

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \underbrace{\left\langle \cos^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\right\rangle}_{=1/2} \hat{r}$$

Então

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}}$$

Superfície Σ



Potência total irradiada

$$\langle P \rangle = \int_\Sigma \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a}$$

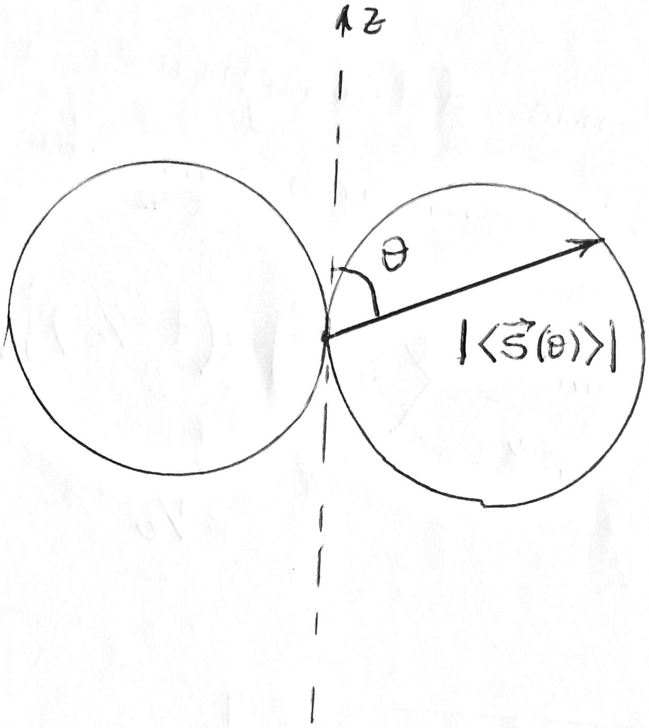
$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{R^2} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}$$

independe do raio da esfera (cons de energia!)

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$



Perceba que nenhuma radiação é emitida ao longo do eixo do dipolo. A emissão é máxima na direção perpendicular ao eixo do dipolo ($\theta = \pi/2$).