Exercício 1

O espaço amostral resultante dos lançamentos do dado é

$$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);$$
$$(2,1);(2,2);...;(6.1);...(6,5);(6,6)\}$$

É fácil deduzir que X: O número mínimo entre os dois lançamentos assume valores

$$\{1;2;3;4;5;6\}$$

com probabilidades

$$P(X=1)=\frac{11}{36};P(X=2)=\frac{9}{36};P(X=3)=\frac{7}{36};$$
$$P(X=4)=\frac{5}{36};P(X=5)=\frac{3}{36};P(X=6)=\frac{1}{36}.$$

Exercício 1 A função de distribuição (acumulada) de X, definida para qualquer número real x é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 1; \\ 0,31 & se \quad 1 \leq x < 2; \\ 0,56 & se \quad 2 \leq x < 3; \\ 0,75 & se \quad 3 \leq x < 4; \\ 0,89 & se \quad 4 \leq x < 5; \\ 0,97 & se \quad 5 \leq x < 6; \\ 1 & se \quad x \geq 6. \end{cases}$$

Exercício 1 A média de X é

$$\mu = E[X] = 1.\frac{11}{36} + 2.\frac{9}{36} + 3.\frac{7}{36} + 4.\frac{5}{36} +$$

$$5.\frac{3}{36} + 6.\frac{1}{36} = \frac{1}{36}.[11 + 18 + 21 + 20 + 15 + 6] = \frac{91}{36} = 2,53.$$

O valor esperado de X^2 é

$$E[X^2] = 1^2.\frac{11}{36} + 2^2.\frac{9}{36} + 3^2.\frac{7}{36} + 4^2.\frac{5}{36} +$$

$$5^2.\frac{3}{36} + 6^2.\frac{1}{36} = 1.\frac{11}{36} + 4.\frac{9}{36} + 9.\frac{7}{36} + 16.\frac{5}{36} +$$

$$25.\frac{3}{36} + 36.\frac{1}{36} = \frac{1}{36}.[11 + 36 + 63 + 80 + 75 + 36] = \frac{301}{36} = 8,36.$$

Portanto temos
$\sigma^2 = Var(X) = E[X^2] - \mu^2 = 8,36 - 6,4 = 1,99 = 2$ e
$\sigma = \sqrt{2} = 1,41.$

Exercício 1 Quanto à variável aleatória $Y = 6 - X$, assume os valores

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

com probabilidades

$$P(X = 5) = \frac{11}{36}; P(X = 4) = \frac{9}{36}; P(X = 3) = \frac{7}{36};$$

$$P(X = 2) = \frac{5}{36}; P(X = 1) = \frac{3}{36}; P(X = 0) = \frac{1}{36}.$$

O valor esperado de Y é
$E[Y] = E[6 - X] = 6 - E[X] = 6 - 2,53 = 3,47$. A variância é
$\sigma^2 = Var(Y) = Var(6 - X) = Var(X) = 2$.

Exercício 2 Seja X: o número de caras no lançamento de três moedas perfeitas. X assume os valores $0, 1, 2$ e 3 com probabilidades $\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{8}$, respectivamente.
Seja Y a variável aleatória Ganho. Pelo enunciado deduzimos que Y assume os valores $8; 3; 1$ e -10 com probabilidades $\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{3}{8}; \frac{1}{8}$, respectivamente.
Portanto

$$E[Y] = 8.\frac{1}{8} + 3.\frac{3}{8} + 1.\frac{3}{8} - 10.\frac{1}{8} = \frac{10}{8} = 1,25.$$

Exercício 3
Considere a repetição de experimentos de Bernoulli independentes e identicamente distribuidos com probabilidade de sucesso $p = 0,6$, $q = 1 - p$. O experimento é repetido até a ocorrência do primeiro sucesso. Observamos que a variável aleatória Z: o número de ensaios até o primeiro sucesso assume os valores

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; ....; k; ....$$

com respectivas probabilidades

$$0,6; 0,6.0,4; 0,6.0,4^2; 0,6.0,4^3; 0,6.0,4^4;$$

$$0,6.0,4^5; 0,6.0,4^6; ....; 0,6.0,4^k; ...$$

Exercício 3
Assim

$$E[Z] = 10.0,6{+}20.0,6.0,4{+}30.0,6.0,16{+}40.0,6.0,064{+}50.0,6.0,256{+}$$

$$5.\sum_{k=6}^{\infty} k.p.q^k = 22,9 + 5.p.q.\sum_{k=6}^{\infty} kq^{k-1} =$$

$$22,9 + 5.p.q.\sum_{k=6}^{\infty}(q^k)'$$

$$= 22,9 + 5.p.q.\left[\sum_{k=6}^{\infty}(q^k)\right]'$$

Exercício 3

$$= 22,9 + 5.p.q.[\frac{q^6}{1-q}]' =$$

$$22,9 + 5.p.q.[\frac{q^5(5p+1)}{(1-q)^2}] =$$

$$= 22,9 + 5.\frac{q^6(5p+1)}{p}$$

$=$

$$22,9 + 5.0,017 = 22,9 + 0,08 = 23.$$

Exercício 4
Seja N a variável aleatória, número de petroleiros que chegam à refinaria em um dia. Então N tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 2$ e

$$P(N = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}; k = 0, 1, 2, 3, ...$$

(a) Fácil concluir que o que procuramos é

$$P(N > 3) = 1 - P(N \leq 3) = 1 - \left[e^{-2} + e^{-2}.2 + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!} \right] =$$

$$1 - [0,1353 + 0,2707 + 0.2707 + 0,1804] = 1 - 0,86 = 0,14.$$

Exercício 4

(b) Para atendermos os navios que chegarem comm probabilidade maior ou igual a $0,95$, devemos procurar o número k tal que $P(N \leq k) \geq 0,95$. A ideia é calcular as probabilidades acumuladas (função de distribuição) até ultrapassarmos $0,95$:

$$P(N \leq 0) = 0,1353; P(N \leq 1) = 0,406; P(N \leq 2) = 0,6767;$$

$$P(N \leq 3) = 0,8571; P(N \leq 4) = 0,9473; P(N \leq 5) = 0,9834.$$

assim $k = 5$ e aumentaremos as instalações de $5 - 3 = 2$ unidades.
(c)$E[N] = \lambda = 2.$

Exercício 5 O número de moradores que tem alergia tem distribuição binomial de parâmetros $n = 13$ e $p = 0,2$, isto é, $N \sim B(13, 0, 2)$.
A sua função de probabilidade é

$$P(N = k) = \binom{13}{k} 0,2^k 0,8^{13-k}; k = 0; 1; 2; ....13.$$

(a)
$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - [P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3)] =$
$1 - [0,8^{13} + 13.0,2.0,8^{12} + 78.0,2^2.0,8^{11} + 286.0,2^3.0,8^{10}] = 1 - 0,75 = 0,25.$

(b) Consideramos $N^* \sim B(26, 0, 2)$ e calculamos

$$P(N^* \geq 8) = 1 - P(N^* \leq 7).$$

(c) Desejamos calcular

$$P(4 \leq N \leq 8) = P(N \leq 8) - P(N < 4) = F(8) - F(4-) = F(8) - F(3) =$$
$$P(N = 8) + P(N = 7) + P(N = 6) + P(N = 5) + P(N = 4) =$$
$$0,001 + 0,006 + 0,023 + 0,069 + 0,154 = 0,25$$

Exercício 6

Considere a variável aleatória M: o número de peças defeituosas dentre as 20 escolhidas, $M \sim B(20, 0, 1)$. Assim

$$P(M = k) = \binom{20}{k} 0, 1^k .o, 9^{20-k}; k = 0, 1, 2, ..., 20.$$

Portanto $P(M = 0) = 0, 9^{20} = 0, 12$, $P(M \in \{1, 2\}) =$
$20.0, 1.0, 9^{19} + 190.0, 1^2.0, 9^{18} = 0, 27 + 0, 285 = 0, 55$ e
$P(M \geq 3) = 1 - 0, 12 - 0, 55 = 0, 33.$
Seja Y a variável aleatória definida pelo comprador. Y assume os valores $20, 10, 8$ com probabilidades $0, 12, 0, 55, 0, 33$ respectivamente. A sua média é

$$\mu = E[Y] = 20.0, 12 + 10.0, 55 + 8.0, 33 = 10, 54.$$

Como, segundo o critério do comprador o fabricante ganharia, em média, um valor menor do que 13,5, a alternativa do comprador não é vantajosa.

Exercício 7 Se a cada hora, chegam em média 30 chamadas, a cada minuto chegam em média 0,5 chamadas. Assim

(a)

$$N(3) \sim P(1,5) \text{ e } P(N(3) = 0) = e^{-1,5} = 0,22.$$

(b)

$$P(N(5) \geq 3) = 1 - [P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2)] =$$

$$1 - \left[e^{-2,5} + e^{-2,5}.2,5 + \frac{e^{-2,5}2,5^2}{2} \right] =$$

$$1 - [0,0821 + 0,2052 + 0,2565] = 0,46.$$