Ex 3 Lista 4

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ função

Cont. tq $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq f(x) \leq 1$

queremos achar $c \in [0,1]$

tal que $f(c) = c$ $\to f(c) - c = 0$

considere $h(x) = f(x) - x$

Note que $h : [0,1] \to \mathbb{R}$

é bem def e é contínua

Se existir $c \in [0,1]$ t.q.

$h(c) = 0$ então

$f(c) - c = 0$ e, portanto,

$$\boxed{f(c) = c.}$$

$h(0) = ?$

$h(1) = ?$

- $\underline{h(0)} = f(0) - 0 = \underline{f(0) \in [0,1]}$

- $h(1) = \underbrace{\overbrace{f(1)}^{\in [0,1]} - 1}_{\in [-1,0]}$

$h(1) \leq 0 \leq h(0)$

Pelo TVI, como

h é contínua e

0 está entre $h(0)$ e $h(1)$

então existe

$c \in [0,1]$ tq

$h(c) = 0.$

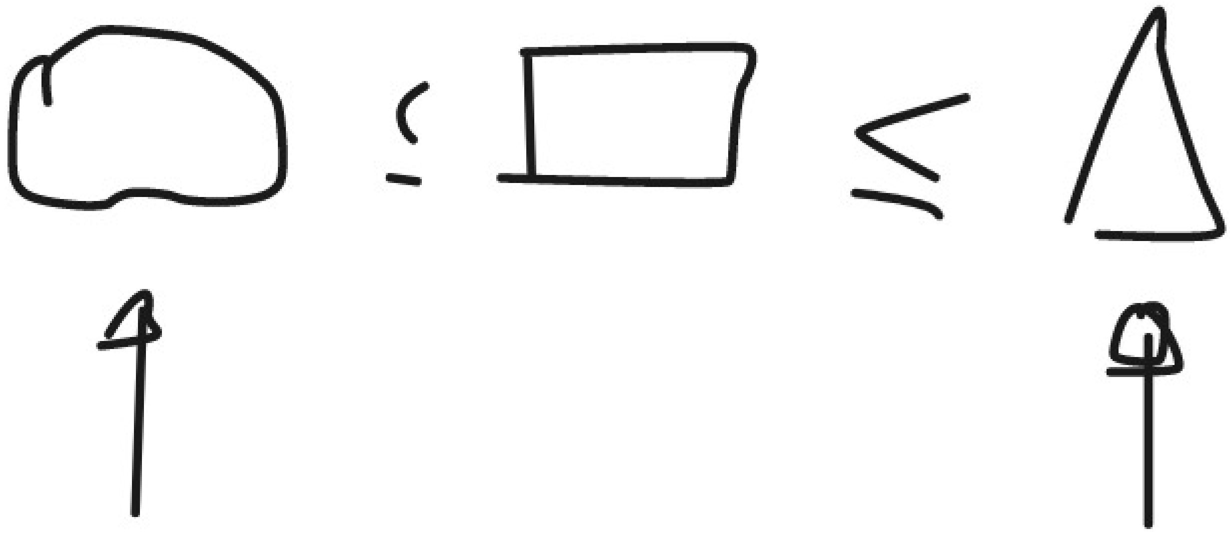
$A \subset \mathbb{R}$

A é intervalo

se $\forall\, x, y \in A$

se $z \in [x, y]$, então

$z \in A$



$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \to 0}$$

$$\underset{\displaystyle 1}{\underset{\parallel}{\lim_{x\to 0} f(x)}} \le \boxed{\lim_{x\to 0} g(x)} \le \underset{\displaystyle 2}{\underset{\parallel}{\lim_{x\to 0} h(x)}}$$

Etg

1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 cos\left(\dfrac{x^3-1}{x^4}\right) & \text{se} \quad x > 0 \\ x^3(x-1) & \text{se} \quad -1 < x \leq 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Estude f com relação a continuidade e derivabilidade nos pontos $p = 0$ e $q = -1$

- $p = 0$

Cont:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 \cdot (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x^3-1}{x^4}\right)}_{\text{é lim.}}$$

$$= 0$$

Como os limites laterais existem, são iguais a zero e $f(0) = 0$ então f é cont. em 0.

deriv. :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = ?$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 \cdot (x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} x^2 (x-1) = 0$$

miro

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - \overset{\to 0}{f(0)}}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 \cdot \cos\left(\frac{x^3 - 1}{x^4}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \overbrace{x^2}^{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x^3 - 1}{x^4}\right)}_{\text{é limitado}}$$

$$= 0$$

portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existe e

f é derivável

em 0