Proposição: Sejam a, b inteiros e $d = mdc(a,b)$. A equação diofantina $aX + bY = c$ tem soluções se e somente se $d | c$.

Demonstração:

Consideramos o conjunto I de todos os valores que o primeiro membro pode assumir, i.e

$$I = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

Note que I é um ideal de $\mathbb{Z}$. De fato, seja $\alpha, \beta \in I$ então ($\alpha = a \cdot x_1 + b\, y_1$ e $\beta = a \cdot x_2 + b \cdot y_2$).

$$\alpha + \beta = (a\, x_1 + b \cdot y_1) + (a\, x_2 + b y_2) = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \in I$$

e para $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\lambda \alpha = \lambda(a x_1 + b y_1) = a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1).$$

Como $d = mdc(a,b)$, temos que $I = d\mathbb{Z}$. logo,

$\forall \alpha \in I$, $d | \alpha = c$.

$\blacksquare$

Teorema: Sejam a, b e c inteiros tais que $d = mdc(a,b)$ divide c. Escrevendo d na forma $d = ra + sb$, $r, s \in \mathbb{Z}$, Temos que $x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$, $y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

Toda outra solução é da forma

$$x = r \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d} t, \quad y = s \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d} t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

E, reciprocamente, para todo $t \in \mathbb{Z}$ os valores x e y dados pelas fórmulas acima são soluções da equação.

Demonstração:

Se $d = ra + sb$ (Teo. de Bezout), multiplicando ambos os membros por $\frac{c}{d}$, temos que

$$\left(r \frac{c}{d}\right) a + \left(s \cdot \frac{c}{d}\right) b = d \cdot \frac{c}{d} = c.$$

Logo, $\left(x_0 = r\frac{c}{d}, \; y_0 = s\frac{c}{d}\right)$ é uma solução.

Devemos agora provar que todo par de inteiros da forma dada no enunciado é solução e, reciprocamente, que toda solução é dessa forma.

($\Rightarrow$) Basta substituir em $ax + by = c$.

($\Leftarrow$) Seja agora (x', y') uma solução, mostraremos que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x' = x_0 + \frac{b}{d}t$, $y' = y_0 - \frac{a}{d}t$

Como (x', y') é solução temos que

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0$$

donde

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y') \quad (1)$$

Escrevendo, $a = a_1 d$ e $b = b_1 d$, segue que

$$mdc(a_1, b_1) = mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{d}{d} = 1$$

obs: Se $d = mdc(a, b) \Rightarrow mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

Daí, dividindo (1) por d, segue que

$$a_1(x' - x_0) = b_1(y_0 - y') \quad (2)$$

Em particular $b_1 \mid a_1(x' - x_0)$, como $mdc(a_1, b_1) = 1$, do Teorema de Euclides temos que $b_1 \mid x' - x_0$ e existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x' - x_0 = b_1 t$, i.e

$$x' = x_0 + \frac{b}{d}t$$

Ainda, substituindo $(x' - x_0)$ por $b_1 t$ em (2),

$$a_1 \cancel{b_1} t = \cancel{b_1}(y_0 - y') \Rightarrow y' = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

obs: Se $mdc(a,b) = d$ então $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Demonstração:

Primeiro vamos usar o seguinte resultado:

Se existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ra + sb = 1$, então $mdc(a,b) = 1$

Seja $d = mdc(a,b) \Rightarrow d \mid a$ e $d \mid b \Rightarrow$

$d \mid ra + sb = 1 \Rightarrow d = 1$.

Daí, como $mdc(a,b) = d$, pelo teorema de Bezout, existe $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d = ra + sb \Rightarrow 1 = r\frac{a}{d} + s\frac{b}{d} \Rightarrow$$

$mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

$\blacksquare$

obs: Teorema de Euclides:

Sejam a, b, c inteiros tais que $a \mid bc$. Se $mdc(a,b) = 1$, então $a \mid c$.

Demonstração:

Se $mdc(a,b) = 1$, então $mdc(ac, bc) = |c|$. Daí, como $a \mid ac$ e $a \mid bc$ (hip) então $a \mid |c| \Rightarrow a \mid c$.

$\blacksquare$

Ex 2 - pág 102

(i) $54x + 21y = 906$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc $(54, 21)$. Pelo algoritmo de Euclides

	2	1	1	3
54	21	12	9	3
12	9	3	0	

Logo, $\text{mdc}(54, 21) = 3$. Assim, como $3 \mid 906$, a eq. diofantina tem solução. Note que

$$3 = 12 - 9 = 12 - (21 - 12) = 2 \cdot 12 - 21 =$$

$$2(54 - 2 \cdot 21) - 21 = \underbrace{2}_{r} \cdot 54 - \underbrace{5}_{s} \cdot 21.$$

Assim, uma solução particular de (i) é:

$$x_0 = 2 \cdot \frac{906}{3} = 604 \qquad y_0 = (-5) \cdot \frac{906}{3} = -1510$$

Com efeito, a sol. geral é

$$x = x_0 + \frac{21}{3}t \quad , \quad y = y_0 - \frac{54}{3}t.$$

Com efeito

$$x_0 + \frac{21}{3}t > 0 \Rightarrow \frac{21}{3}t > -604 \Rightarrow t \geq -86 \quad \text{e}$$

$$y_0 - \frac{54}{3} t > 0 \Rightarrow -\frac{54}{3} t > 1510 \Rightarrow$$

$$18t < -1510 \Rightarrow t \leq -84$$

∎

(ii) $123x + 360y = 99$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc(360, 123). Pelo algoritmo de Euclides,

	2	1	12	1	2
360	123	114	9	6	3
114	9	6	3	0	

Assim, $\text{mdc}(360, 123) = 3$. $(3 \mid 99)$

$$3 = 9 - 6 = 9 - (114 - 9 \cdot 12) = 13 \cdot 9 - 114 =$$

$$13(123 - 114) - 114 = 13 \cdot 123 - 14 \cdot 114 =$$

$$13 \cdot 123 - 14(360 - 2 \cdot 123) = \underbrace{(-14)}_{s} 360 + \underbrace{41}_{r} \cdot 123$$

Assim, uma solução particular de (ii)

$$x_0 = 41 \cdot \frac{99}{3} = 1353 \quad e \quad y_0 = (-14) \cdot \frac{99}{3} = -462$$

Além disso, a solução geral é

$$x = x_0 + \frac{360}{3} t \quad e \quad y = y_0 - \frac{123}{3} t$$

Note que $\qquad t > -11,2$

$-11,2$

$$x_0 + \frac{360}{3} t > 0 \Rightarrow \frac{360}{3} t > -1353 \Rightarrow t \geq -11$$

$-11,2$

-12

$$y_0 - \frac{123}{3} t > 0 \Rightarrow -41t > 462 \Rightarrow t \leq -12$$

$t < -\frac{462}{41}$

Não há solução inteira positiva.

$\blacksquare$

(iii) $30x + 17y = 300$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc $(30, 17)$. Pelo Algoritmo de Euclides,

	1	1	3	4
30	17	13	4	1
13	4	1	0	

Logo mdc $(30, 17) = 1$. Como $1 \mid 300$, (iii) tem solução. Note que

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3(17 - 13) = -3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 =$$

$$-3 \cdot 17 + 4(30 - 17) = 4 \cdot 30 - 7 \cdot 17$$

Assim $r = 4$ e $s = -7$. Logo, uma solução particular de (iii) é

$$x_0 = 4 \cdot \frac{300}{1} = 1200 \quad \text{e} \quad y_0 = -7 \cdot 300 = -2100.$$

Assim, a solução geral é:

$$x = x_0 + 17t \quad , \quad y = y_0 - 30t \qquad t > -\frac{1200}{17} = -70{,}58$$

$$x_0 + 17t > 0 \Rightarrow 17t \geq -1200 \Rightarrow t \geq -70$$

$$y_0 - 30t > 0 \Rightarrow -30t > 2100 \Rightarrow t < -70$$

Logo (iii) não tem soluções positivas.

(4) $11x + 9y = 270, \quad x, y > 0$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc $(11, 9)$. Pelo

	1	4	2
11	9	2	1
2	1	0	

Assim, mdc $(11, 9) = 1$ e como $1 \mid 270$ a eq. diofantina tem solução. Daí,

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4(11 - 9) = \underbrace{(-4)}_{r} \cdot 11 + \underbrace{5}_{s} \cdot 9$$

Daí, uma sol. particular é:

$$x_0 = (-4) \cdot 270 = -1080 \quad e \quad y_0 = 5 \cdot 270 = 1350$$

efeito a sol. geral é

$x = x_0 + 9t$ e $y = y_0 - 11t$

$x_0 + 9t > 0 \Rightarrow 9t > 1080 \Rightarrow t > 120$

$y_0 - 11t > 0 \Rightarrow -11t > -1350 \Rightarrow t \leq 122$

122

120 122,7

$t = 121, 122$

logo, $x_1 = x_0 + 9.121$, $x_2 = x_0 + 9.122$,

$y_1 = y_0 - 11.121$, $y_2 = y_0 - 11.122$ e os multiplos de 9 são são $9x_1$, $9x_2$ e os multiplos do 11 são $11.y_1$ e $11y_2$.

9

(5) Note que queremos $g < 1000$ tal que

$$\begin{cases} g = 37x + 9 \\ g = 52y + 15 \end{cases}$$

Daí, $37x + 9 = 52y + 15 \Rightarrow 37x - 52y = 6$ (1). Vamos encontrar mdc$(52, 37)$. Pelo algoritmo de Euclides,

	1	2	2	7
52	37	15	7	1
15	7	1	0	

Assim,

$$1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2(37 - 2 \cdot 15) = -2 \cdot 37 + 5 \cdot 15 =$$

$$-2 \cdot 37 + 5(52 - 37) = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37.$$ Daí, para a equação (1), temos que

$$r = -7 \quad e \quad s = -5$$

Com efeito, uma solução particular é

$$x_0 = -7 \cdot \frac{6}{1} = -42, \quad y_0 = -5 \cdot \frac{6}{1} = -30.$$

Assim, a solução geral é:

$$x = x_0 - \frac{52}{1} t, \quad y = y_0 - \frac{37}{1} t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Queremos

$0 \leq 37x + 9 < 1000 \Rightarrow -9 \leq 37x < 991 \Rightarrow$

$0 \leq x \leq 26$. Daí,

$0 \leq x_0 - 52t \leq 26 \Rightarrow 42 \leq -52t \leq 68 \Rightarrow$

$-42 \geq 52t \geq -68 \Rightarrow -0{,}8 \geq t \geq -1{,}3 \Rightarrow t = -1$.

Daí, $x = x_0 - 52(-1) = -42 + 52 = 10$

$0 \leq 52y + 15 < 1000 \Rightarrow -15 \leq 52y < 985 \Rightarrow$

$0 \leq y \leq 18$. Daí,

$0 \leq y_0 - 37t \leq 18 \Rightarrow 30 \leq -37t \leq 48 \Rightarrow$

$-30 \geq 37t \geq -48 \Rightarrow \underline{\underline{t = -1}}$

Logo $z = 37 . 10 + 9 = 379$.

(8) Temos que $17 \mid 2x+3y$. Queremos que $17 \mid 9x+5y$.

Note que

$$3(9x+5y) - 5(2x+3y) = 17x.$$

Assim, $17 \mid 3(9x - 5y) - 5(2x + 3y)$ e

$17 \mid -5(2x + 3y)$. Portanto $17 \mid 3(9x - 5y)$.

Agora usando o lema da obs abaixo, como 17 é primo e $17 \nmid 3$ então $17 \mid 9x - 5y$.

obs: Lema: Seja p um número primo, e $a, b \in \mathbb{Z}$, então se $p \mid ab$, temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$

Dem:

Se $p \mid a$, ok. Se $p \nmid a \Rightarrow mdc(p, a) = 1$. Logo pelo Teorema de Euclides, $p \mid b$.

■

(9) x - reais (original)

y - centavos

Então, o valor original do cheque é $\overbrace{100x + y}^{\text{em centavos}}$. Como reais e centavos foram trocados temos que

$$100y + (x - 68) = 2(100x + y) \Rightarrow$$

$$100y + x - 68 = 200x + 2y \Rightarrow -199x + 98y = 68$$

Vamos resolver a equação diofantina. Primeiro, encontremos o $mdc(-199, 98) = mdc(199, 98)$. Pelo algoritmo de Euclides,

	2	32	1	2
199	98	3	2	1
3	2	1	0	

$mdc(-199, 98) = 1$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (98 - 32 \cdot 3) = -98 + 33 \cdot 3 =$$

$$-98 + 33(199 - 2 \cdot 98) = 33 \cdot 199 - 67 \cdot 98$$

Assim, $r = -33$ e $s = -68$. Com efeito, uma solução particular é

$$x_0 = -33 \cdot 68 \quad \text{e} \quad y_0 = -67 \cdot 68$$

Daí, a solução geral é

$$x = x_0 + 98t, \quad y = y_0 + 199t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Substitua x e y em $100x + y$ (em função de t).

$$100x + y = 100(x_0 + 98t) + y_0 + 199t =$$
$$100x_0 + y_0 + 9999t.$$

Note que

$$100x_0 + y_0 + 9999t > 0 \Rightarrow$$

$t \geq 23$

Portanto, tomando $t = 23$,

$$-222956 + 9999 \cdot 23 = 1021.$$

Assim $100x + y = 1021$ centavos, ou ainda 10 reais e 21 centavos.