

Proposição: Sejam  $a, b$  inteiros e  $d = \text{mdc}(a, b)$ . A equação diofantina  $aX + bY = c$  tem soluções se e somente se  $d \mid c$ .

Demonstração:

Consideramos o conjunto  $I$  de todos os valores que o primeiro membro pode assumir, i.e

$$I = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

Note que  $I$  é um ideal de  $\mathbb{Z}$ . De fato, seja  $\alpha, \beta \in I$  então  $(\alpha = a x_1 + b y_1 \text{ e } \beta = a x_2 + b y_2)$ .

$$\alpha + \beta = (a x_1 + b y_1) + (a x_2 + b y_2) = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \in I$$

e para  $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\lambda \alpha = \lambda (a x_1 + b y_1) = a(\lambda x_1) + b(\lambda y_1).$$

Como  $d = \text{mdc}(a, b)$ , temos que  $I = d\mathbb{Z}$ . Logo,

$$\forall \alpha \in I, \quad d \mid \alpha = c.$$



Teorema: Sejam  $a, b$  e  $c$  inteiros tais que  $d = \text{mdc}(a, b)$  divide  $c$ . Escrevendo  $d$  na forma  $d = ra + sb$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$ , ①

Temos que  $x_0 = r \cdot \frac{c}{d}$ ,  $y_0 = s \cdot \frac{c}{d}$  é uma solução da equação  $ax + by = c$ .

Toda outra solução é da forma

$$x = r \cdot \frac{c}{d} + \frac{b}{d} t, \quad y = s \cdot \frac{c}{d} - \frac{a}{d} t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

É, reciprocamente, para toda  $t \in \mathbb{Z}$  os valores  $x$  e  $y$  dados pelas fórmulas acima são soluções da equação.

Demonstração:

Se  $d = ra + sb$  (Teo. de Bezout), multiplicando ambos os membros por  $\frac{c}{d}$ , temos que

$$\left(r \cdot \frac{c}{d}\right) a + \left(s \cdot \frac{c}{d}\right) b = d \cdot \frac{c}{d} = c$$

Logo,  $(x_0 = r \cdot \frac{c}{d}, y_0 = s \cdot \frac{c}{d})$  é uma solução.

Devemos agora provar que todo par de inteiros da forma dada no enunciado é solução e, reciprocamente, que toda solução é dessa forma.

( $\Rightarrow$ ) Basta substituir em  $ax + by = c$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja agora  $(x', y')$  uma solução, mostraremos que

existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que  $x' = x_0 + \frac{b}{d}t$ ,  $y' = y_0 - \frac{a}{d}t$

Como  $(x', y')$  é solução temos que

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0$$

donde

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y') \quad (1)$$

Escrevendo  $a = a_1d$  e  $b = b_1d$ , segue que

$$\text{mdc}(a_1, b_1) = \text{mdc}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{d}{d} = 1$$

obs: Se  $d = \text{mdc}(a, b) \Rightarrow \text{mdc}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$

Dai, dividindo (1) por  $d$ , segue que

$$a_1(x' - x_0) = b_1(y_0 - y') \quad (2)$$

Em particular  $b_1 \mid a_1(x' - x_0)$ , como  $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$ , do Teorema de Euclides temos que  $b_1 \mid x' - x_0$  e existe  $t \in \mathbb{Z}$  tal que  $x' - x_0 = b_1 t$ , ie

$$x' = x_0 + \frac{b}{d}t$$

Ainda, substituindo  $(x' - x_0)$  por  $b_1 t$  em (2)

$$a_1 b_1 t = b_1 (y_0 - y') \Rightarrow y' = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

obs/ Se  $\text{mdc}(a, b) = d$  então  $\text{mdc}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ .

Demonstração:

Primeiro vamos usar o seguinte resultado:

Se existem  $r, s \in \mathbb{Z}$  tais que  $ra + sb = 1$ , então  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

Seja  $d = \text{mdc}(a, b) \Rightarrow d|a$  e  $d|b \Rightarrow$

$$d|ra + sb = 1 \Rightarrow d = 1.$$

Dai, como  $\text{mdc}(a, b) = d$ , pelo teorema de Bezout, existe  $r, s \in \mathbb{Z}$  tais que

$$d = ra + sb \Rightarrow 1 = r \frac{a}{d} + s \frac{b}{d} \Rightarrow$$

$$\text{mdc}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$



obs/ Teorema de Euclides:

Sejam  $a, b, c$  inteiros tais que  $a|bc$ . Se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $a|c$ .

Demonstração:

Se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $\text{mdc}(ac, bc) = |c|$ . Dai, como  $a|ac$  e  $a|bc$  (hip) então  $a||c| \Rightarrow a|c$ .



Ex 2 - pag 102

$$(i) \quad 54x + 21y = 906$$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc (54, 21). Pelo algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 54 & 21 & 12 & 9 & \textcircled{3} \\ \hline 12 & 9 & 3 & 0 & \end{array}$$

Logo,  $\text{mdc}(54, 21) = 3$ . Assim, como  $3 \mid 906$ , a eq. diofan-  
tina tem solução. Note que

$$3 = 12 - 9 = 12 - (21 - 12) \hat{=} 2 \cdot 12 - 21 =$$

$$2(54 - 2 \cdot 21) - 21 = \underbrace{2 \cdot 54}_r - \underbrace{15 \cdot 21}_s$$

Assim, uma solução particular de (i) é:

$$x_0 = 2 \cdot \frac{906}{3} = 604 \quad y_0 = (-5) \cdot \frac{906}{3} = -1510$$

Com efeito, a sol. geral é

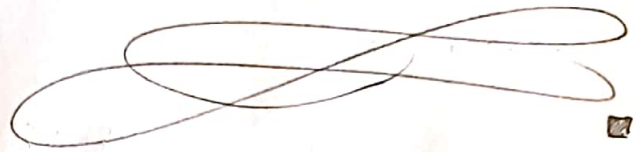
$$x = x_0 + \frac{21}{3}t, \quad y = y_0 - \frac{54}{3}t$$

Com efeito

$$x_0 + \frac{21}{3}t > 0 \Rightarrow \frac{21}{3}t > -604 \Rightarrow t > -86 \quad e$$

$$y_0 - \frac{54}{3} t > 0 \Rightarrow -\frac{54}{3} t > 1510 \Rightarrow$$

$$18 t < -1510 \Rightarrow t < -84$$



$$(ii) 123x + 360y = 99$$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc (360, 123). Pelo algoritmo de Euclides,

	2	1	12	1	2
360	123	114	9	6	(3)
114	9	6	3	0	

$$\text{Assim, mdc}(360, 123) = 3. \quad (3 | 99)$$

$$3 = 9 - 6 = 9 - (114 - 9 \cdot 12) = 13 \cdot 9 - 114 =$$

$$13(123 - 114) - 114 = 13 \cdot 123 - 14 \cdot 114 =$$

$$13 \cdot 123 - 14(360 - 2 \cdot 123) = \underbrace{(-14)}_s 360 + \underbrace{41}_r 123$$

Assim, uma solução particular de (ii)

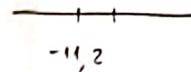
$$x_0 = 41 \cdot \frac{99}{3} = 1353 \quad \text{e} \quad y_0 = (-14) \cdot \frac{99}{3} = -462$$

Além disso, a solução geral é

$$x = x_0 + \frac{360}{3} t \quad \text{e} \quad y = y_0 - \frac{123}{3} t$$

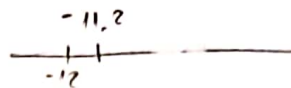
Note que

$$t > -11,2$$



$$x_0 + \frac{360}{3}t > 0 \Rightarrow \frac{360}{3}t > -1353 \Rightarrow t \geq -11$$

$$y_0 - \frac{123}{3}t > 0 \Rightarrow -41t > 462 \Rightarrow t \leq -12$$



Não há solução inteira positiva.

$$t < -\frac{462}{41}$$



$$(iii) 30x + 17y = 300$$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc (30, 17). Pelo Algoritmo de Euclides,

	1	1	3	4
30	17	13	4	①
13	4	1	0	

Logo  $\text{mdc}(30, 17) = 1$ . Como  $1 | 300$ , (iii) tem solução. Note que

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3(17 - 13) = -3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 =$$

$$-3 \cdot 17 + 4(30 - 17) = 4 \cdot 30 - 7 \cdot 17$$

Assim  $r = 4$  e  $s = -7$ . Logo, uma solução particular de

(iii) é

$$x_0 = 4 \cdot \frac{300}{1} = 1200 \quad \text{e} \quad y_0 = -7 \cdot 300 = -2100$$

Assim, a solução geral é:

$$x = x_0 + 17t, \quad y = y_0 - 30t \quad t > \frac{-1200}{17} = -70,58$$

$$x_0 + 17t > 0 \Rightarrow 17t > -1200 \Rightarrow t > -70$$

$$y_0 - 30t > 0 \Rightarrow -30t > 2100 \Rightarrow t < -70$$

Logo (iii) não tem soluções positivas.



$$(4) \quad 11x + 9y = 270, \quad x, y > 0$$

Demonstração:

Vamos encontrar o mdc (11, 9). Pelo

	1	4	2
11	9	2	1
2	1	0	

Assim,  $\text{mdc}(11, 9) = 1$  e como  $1|270$  a eq. diofantina tem soluções. Daí,

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 = 9 - 4(11 - 9) = \underbrace{(-4)}_r \cdot 11 + \underbrace{5}_s \cdot 9$$

Daí, uma sol. particular é:

$$x_0 = (-4) \cdot 270 = -1080 \quad \text{e} \quad y_0 = 5 \cdot 270 = 1350$$

2)

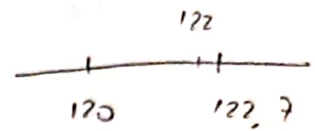


efeito, a sol. geral é

$$x = x_0 + 9t \quad \text{e} \quad y = y_0 - 11t$$

$$x_0 + 9t > 0 \Rightarrow 9t > 1080 \Rightarrow t > 120$$

$$y_0 - 11t > 0 \Rightarrow -11t > -1350 \Rightarrow t \leq 122$$



$$t = 121, 122$$

loop,  $x_1 = x_0 + 9 \cdot 121$ ,  $x_2 = x_0 + 9 \cdot 122$ ,

$y_1 = y_0 - 11 \cdot 121$ ,  $y_2 = y_0 - 11 \cdot 122$  e os múltiplos

de 9 são  $9x_1$ ,  $9x_2$  e os múltiplos de 11 são

$11y_1$  e  $11y_2$ .



(5) Note que queremos  $z < 1000$  tal que

$$\begin{cases} z = 37x + 9 \\ z = 52y + 15 \end{cases}$$

Dai,  $37x + 9 = 52y + 15 \Rightarrow 37x - 52y = 6$  (1). Vamos encontrar  $\text{mdc}(52, 37)$ . Pelo algoritmo de Euclides,

52	1	2	2	7
15	37	15	7	①
	7	1	0	

Assim,

$$1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2(37 - 2 \cdot 15) = -2 \cdot 37 + 5 \cdot 15 =$$

$$-2 \cdot 37 + 5(52 - 37) = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37$$

Dai, para a equação (1), temos que

$$r = -7 \text{ e } s = -5$$

Com efeito, uma solução particular é

$$x_0 = -7 \cdot \frac{6}{1} = -42, \quad y_0 = -5 \cdot \frac{6}{1} = -30.$$

Assim, a solução geral é:

$$x = x_0 - \frac{52}{1}t, \quad y = y_0 - \frac{37}{1}t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Queremos

$$0 \leq 37x + 9 < 1000 \Rightarrow -9 \leq 37x < 991 \Rightarrow$$

$$0 \leq x < 26. \text{ Daí,}$$



$$0 \leq x_0 - 52t \leq 26 \Rightarrow 92 \leq -52t \leq 68 \Rightarrow$$

$$-42 \geq 52t \geq -68 \Rightarrow -0,8 \geq t \geq -1,3 \Rightarrow t = -1.$$

$$\text{Daí, } x = x_0 - 52(-1) = -42 + 52 = 10$$

$$0 \leq 52y + 15 < 1000 \Rightarrow -15 \leq 52y < 985 \Rightarrow$$

$$0 \leq y < 18. \text{ Daí,}$$

$$0 \leq y_0 - 37t \leq 18 \Rightarrow 30 \leq -37t \leq 48 \Rightarrow$$

$$-30 \geq 37t \geq -48 \Rightarrow t = \underline{\underline{-1}}$$

$$\text{Logo } z = 37 \cdot 10 + 9 = 379.$$



(8) Temos que  $17 \mid 2x + 3y$ . Queremos que

$$17 \mid 9x + 5y.$$

Note que

$$3(9x + 5y) - 5(2x + 3y) = 17x.$$

Assim,  $17 \mid 3(9x - 5y) - 5(2x + 3y)$  e

$17 \mid -5(2x + 3y)$ . Portanto  $17 \mid 3(9x - 5y)$ .

Agora usando o lema de obs acima, como 17 é primo e  $17 \nmid 3$  então  $17 \mid 9x - 5y$ .



obs: Lema: Seja  $p$  um número primo, e  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  
então se  $p \mid ab$ , temos que  $p \mid a$  ou  $p \mid b$

Dem:

Se  $p \mid a$ , ok. Se  $p \nmid a \Rightarrow \text{mdc}(p, a) = 1$ . Logo  
pelo Teorema de Euclides,  $p \nmid b$ .

(9)  $x$  - reais (original)  
 $y$  - centavos

em centavos

Então, o valor original do cheque é  $\overbrace{100x + y}$ . Como  
reais e centavos foram trocados temos que

$$100y + (x - 68) = 2(100x + y) \Rightarrow$$

$$100y + x - 68 = 200x + 2y \Rightarrow -199x + 98y = 68$$

Vamos resolver a equação diofantina. Primeiro, encontramos  
 $\text{mdc}(-199, 98) = \text{mdc}(199, 98)$ . Pelo algoritmo de  
 Euclides,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 32 & 1 & 2 \\ 199 & 98 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & \end{array} \quad \text{mdc}(-199, 98) = 1$$

$$1 = 3 - 2 = 3 - (98 - 32 \cdot 3) = -98 + 33 \cdot 3 =$$

$$-98 + 33(199 - 2 \cdot 98) = 33 \cdot 199 - 67 \cdot 98$$

Assim,  $r = -33$  e  $s = -67$ . Com efeito, uma solução  
 particular é

$$x_0 = -33 \cdot 68 \quad \text{e} \quad y_0 = -67 \cdot 68$$

Daí, a solução geral é

$$x = x_0 + 98t, \quad y = y_0 + 199t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Substitua  $x$  e  $y$  em  $100x + y$  (em função de  $t$ ).

$$100x + y = 100(x_0 + 98t) + y_0 + 199t =$$

$$100x_0 + y_0 + 9999t$$

Note que

$$100x_0 + y_0 + 9999t > 0 \Rightarrow$$

$$t \geq 23$$

Portanto, tomando  $t = 23$ ,

$$-222956 + 9999 \cdot 23 = 1021.$$

Assim  $100x + y = 1021$  centavos, ou ainda 10 reais e 21 centavos.

