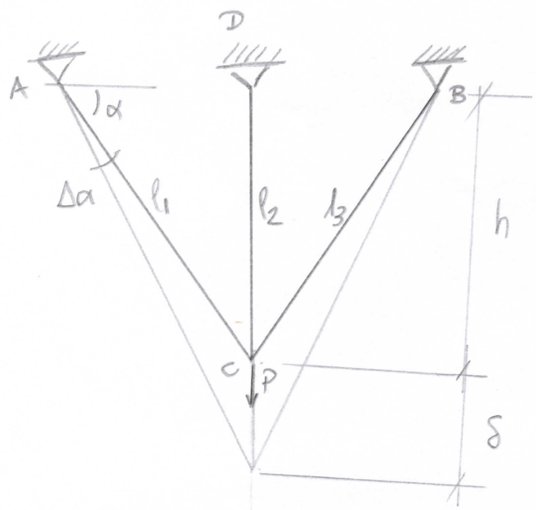
Estruturas Hiperestáticas

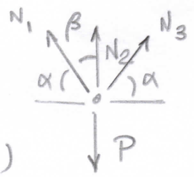


$\Delta\alpha << 1$

- supõe-se que a geometria inalterada nas equações de equilíbrio.

→ Permite a linearização do problema.

Equilíbrio no nó C:



$\sum F_H = 0 \Rightarrow N_1 = N_3 \quad (1)$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow 2N_1\cos\beta + N_2 = P \quad (2)$

Compatibilidade de deslocamentos:

$$l_1 = l_3 = \frac{h}{\cos\alpha} \quad ; \quad l_2 = h$$

$$\begin{cases} \Delta l_1 = \Delta l_3 = \delta\cos\beta \quad \text{(por Williot)} \\ \Delta l_2 = \delta \end{cases}$$

As deformações são:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\delta\cos\beta}{h/\cos\beta} = \frac{\delta}{h}\cos^2\beta$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\delta}{h}$$

Lembrando que $N = EA\varepsilon$, então:

$$N_1 = N_3 = \frac{EA\delta}{h}\cos^2\beta \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{EA\delta}{h} \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2):

$$2\cdot\left(\frac{EA\delta}{h}\cos^2\beta\right)\cos\beta + \frac{EA\delta}{h} = P$$

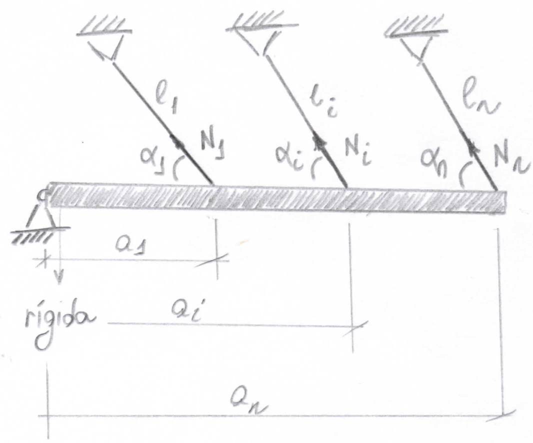
$$\frac{EA\delta}{h}\left(2\cos^3\beta + 1\right) = P$$

Logo: $$\delta = \frac{Ph}{EA(2\cos^3\beta+1)}$$

E assim:

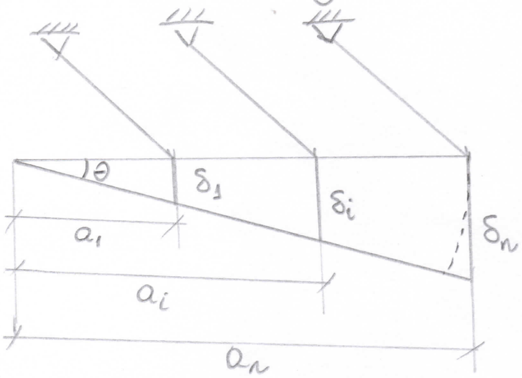
$$N_1 = N_3 = P\,\frac{\cos^2\beta}{2\cos^3\beta+1} \quad ; \quad N_2 = \frac{P}{2\cos^3\beta+1}$$

Estruturas Estaiadas.



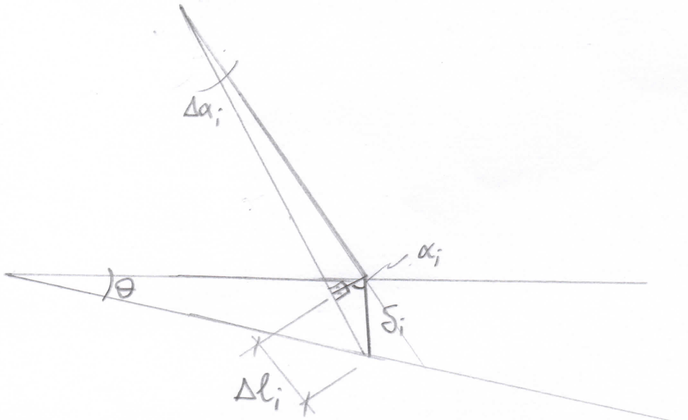
Problema $(n-1)$ vezes hiperstático.

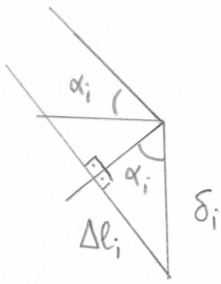
Podemos fazer a seguinte aproximação:



(θ pequeno)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_1}{a_1} = \frac{\delta_i}{a_i} = \frac{\delta_n}{a_n} = \text{cte!} \qquad (I)$$





Para θ pequeno:

$$\Delta l_i = \delta_i \operatorname{sen}\alpha_i$$

Como $N_i = \sigma_i A_i = E_i \varepsilon_i A_i$, temos:

$$N_i = \frac{E_i A_i \delta_i \operatorname{sen}\alpha_i}{l_i} \Longrightarrow \delta_i = \frac{N_i l_i}{E_i A_i \operatorname{sen}\alpha_i} \qquad (II)$$

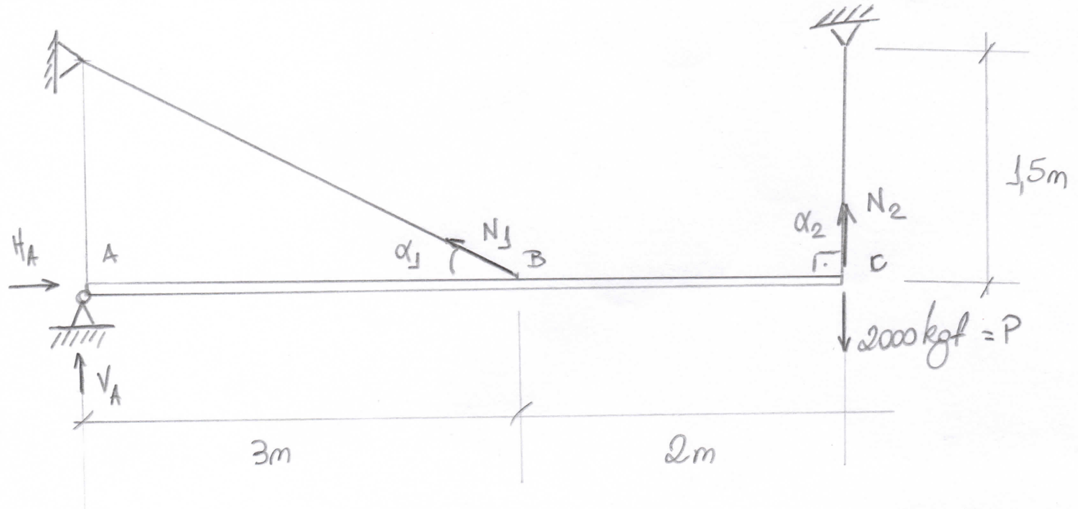
E observando (I) e (II), conclui-se:

$$\frac{N_i l_i}{E_i A_i a_i \operatorname{sen}\alpha_i} = \operatorname{tg}\theta \quad , i = 1, \dots, n$$

$(n-1)$ equações de compatibilidade.

Exemplo: Encontrar o diâmetro mínimo dos estais, considerando:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{11} = 1cm \\ \bar{\sigma} = 600\ kgf/cm^2 = 60\ MPa \\ E = 2.10^6\ kgf/cm^2 = 200\ GPa \end{cases}$$



P = 20 kN

$a_1 = 3m$

$a_2 = 5m$

Equilíbrio:

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow H_A - N_1 \cos\alpha_1 = 0$$

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow V_A + N_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + N_2 - P = 0$$

$$\Sigma M_{(A)} = 0 \Rightarrow N_1 \operatorname{sen}\alpha_1 . a_1 + N_2 a_2 - P a_2 = 0$$

Equação de compatibilidade:

$$\frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1 a_1 \operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2 a_2 \operatorname{sen}\alpha_2}$$

mas:

$\operatorname{sen}\alpha_2 = \operatorname{sen} 90° = 1$

$\ell_2 = 1,5m$

$\ell_1 = \sqrt{1,5^2 + 3^2} \simeq 3,354m$; $\ell_1^2 = 11,25 m^2$

$$\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{1,5}{\ell_1} = 0,4472$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{3}{\ell_1} = 0,8944$$

Substituindo (e lembrando que $E_1 = E_2$ e $A_1 = A_2$):

$$\frac{N_1 . l_1}{3 . \frac{1,5}{l_1}} = \frac{N_2 . l_2}{5} \Rightarrow \frac{N_1 \, l_1^2}{4,5} = \frac{N_2 . 1,5}{5} \Rightarrow \frac{N_1 . 11,25}{4,5} = 0,3 N_2$$

$$N_1 = \frac{4,5 . 0,3}{11,25} N_2 \Rightarrow \boxed{N_1 = 0,12 N_2}$$

Substituindo na equação de equilíbrio de momentos:

$N_1 . sen\,\alpha_1 . a_1 + N_2 a_2 - P a_2 = 0$ (forças em kgf, medidas em m)

$(0,12 . 0,4472 . 3 + 5) N_2 = 2000.5$

$$\boxed{N_2 = 1937,6 \text{ kgf}} \Rightarrow \boxed{N_1 = 232,5 \text{ kgf}}$$

$$\boxed{H_A = 207,9 \text{kgf}} ; \; V_A = P - N_2 - N_1 sen\alpha_1 \Rightarrow \boxed{V_A = -41,6 \text{ kgf}}$$

Existem 2 condições para o dimensoinamento:

- tensão máxima admissível:

$\sigma_{máx} \leq \bar{\sigma}$ como $\sigma_{N2} > \sigma_{N1}$, então: $\sigma_{N2} \leq \bar{\sigma}$

$$\frac{N_2}{A} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{A}{N_2} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}} \Rightarrow A \geq \frac{N_2}{\bar{\sigma}}$$

$$A \geq \frac{1937,6}{600} \cong 3,23 \text{ cm}^2 \Rightarrow \boxed{A \geq 3,23 \text{cm}^2}$$

- deslocamento máximo admissível:

$\delta_{máx} \leq \bar{\delta}$ como $\delta_2 > \delta_1$, então $\delta_2 \leq \bar{\delta}$

$$\delta_2 = \Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 = \frac{N_2}{EA} . l_2 \leq \bar{\delta} \Rightarrow \frac{EA}{N_2 l_2} \geq \frac{1}{\bar{\delta}} \Rightarrow A \geq \frac{N_2 l_2}{E \bar{\delta}}$$

$$A \geq \frac{1937{,}6 \cdot \overset{cm}{150}}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \cong 0{,}14\ cm^2 \Rightarrow \boxed{A \geq 0{,}14 cm^2}$$

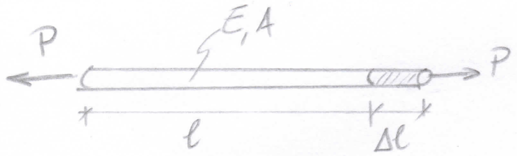
Observando as duas condições:

$$\text{Área mínima} = 3{,}23\ cm^2$$

Como $\phi = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$, então:

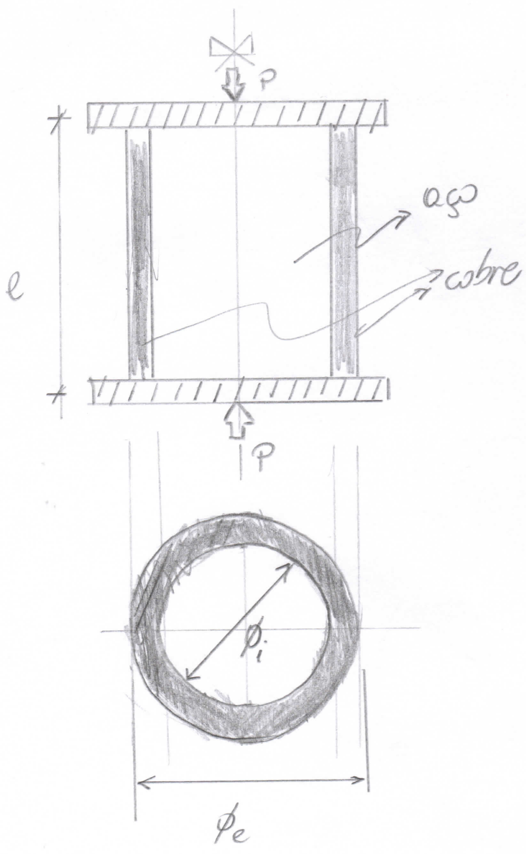
$$\phi_{min} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3{,}23}{\pi}} \Rightarrow \boxed{\phi_{min} \simeq 2{,}03\ cm}$$

Forças Normais em estruturas hiperestáticas



$$\Delta\ell = \frac{P\ell}{EA}$$

Exemplo:



Pede-se $\Delta\ell$, ($\sigma_{aço} = \sigma_a$, $\sigma_{cobre} = \sigma_c$) para o cilindro composto da figura. Tratar as tensões em módulo.

$$A_a = \frac{\pi \phi_i^2}{4}, \quad A_c = \frac{\pi \phi_e^2}{4} - A_a$$

Existe a compatibilidade de deformação:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_c = \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Assim:

$$\sigma_a = E_a \varepsilon \quad e \quad \sigma_c = E_c \varepsilon ,$$

Temos, por equilíbrio:

$$\sigma_a A_a + \sigma_c A_c = P$$

Substituindo:

$$(E_a A_a + E_c A_c)\frac{\Delta l}{l} = P \Rightarrow \Delta l = \frac{Pl}{E_a A_a + E_c A_c} = \frac{Pl}{(EA)_{equivalente}}$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_a A_a + E_c A_c} P \quad e \quad \sigma_c = \frac{E_c}{E_a A_a + E_c A_c} P .$$

Observação:

$A_{eq} = A_c + A_a = A_{TOTAL}$ e assim:

$$E_{eq} = \frac{E_a A_a + E_c A_c}{A_a + A_c} = \frac{E_a A_a + E_c A_c}{A_{eq}}$$

E_{eq} é uma média dos módulos de elasticidade ponderada pelas áreas das seções transversais dos materiais.