3^a Lista de exercícios

① [1.0] Usando o sistema CGS, use o limite Newtoniano para calcular h_{00} (note: essa quantidade é adimensional!), nos casos:

(a) Superfície de um próton ($r_p \simeq 2. \times 10^{-14}$ cm, $m_p \simeq 1.7 \times 10^{-24}$ g)

(b) Superfície da Terra (nesse caso use apenas $R \simeq 6.4 \times 10^8$ cm e o valor de g, a aceleração da gravidade).

(c) Superfície do Sol ($R_\odot \simeq 7. \times 10^{10}$ cm, $M_\odot \simeq 2. \times 10^{23}$ g)

(d) A 100 km de distância de um objeto compacto de massa $M = 10\, M_\odot$.

② [1.0] Como a métrica é o objeto que nos permite calcular normas (ou seja, produtos escalares num determinado espaço), ela também funciona para transformar vetores contra-variantes em covariantes, e vice-versa:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad , \quad B^\mu = g^{\mu\nu} B_\nu \ ,$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o inverso da métrica – ou, em outras palavras, a métrica com componentes contra-variantes. Verifique isso no seguinte caso simples: sejam A^μ e B^ν dois vetores contra-variantes, e $D^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ um tensor contra-variante construído a partir dos dois vetores.

(a) Mostre que a contração desse objeto, $S = g_{\mu\nu} D^{\mu\nu}$ é um escalar, ou seja, é invariante por transformações de coordenadas.

(b) Verifique que $S = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$.

③ [1.0] Mostre que o *volume próprio*, que é invariante no espaço-tempo, é dado por:

$$dV_4 = \sqrt{-\det g}\; d^4x \ ,$$

onde $\det g$ é o determinante da métrica nas coordenadas x.

④ [1.5] Considere o espaço-tempo de duas dimensões dado por:

$$ds^2 = -dv^2 + v^2 du^2 \ .$$

(a) Mostre que esse espaço-tempo é o espaço-tempo de Minkowski, escrito em outras coordenadas, e mostre a relação entre $\{u, v\}$ e $\{ct, x\}$.

(b) Calcule as conexões desse espaço-tempo nas coordenadas $\{u, v\}$.

(c) Mostre que o movimento de uma partícula livre (não-acelerada) tem um 2-momento P_u constante, mas P_v não é constante. Como isso está relacionado com o item (b)?

⑤ [1.0] Demonstre as seguintes identidades relacionadas a derivadas covariantes:

(a) Mostre que a derivada covariante de um tensor contra-variante,

$$D_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} V^\sigma \ ,$$

é um tensor misto (com um índice covariante, μ, e um índice contra-variante, α). Dica: utilize a identidade:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} = 0$$

(b) Mostre que $D_\mu \, \delta^\alpha_\beta = 0$.

(c) Mostre que $D_\mu \, g^{\alpha\beta} = 0$, onde $g^{\alpha\beta}$ é o inverso da métrica, $g^{\alpha\beta} \, g_{\beta\mu} = \delta^\alpha_\mu$.

⑥ [1.5] Os satélites que compõe o sistema GPS (*Global Positioning System*) ficam em órbitas circulares, a 20,2 km da superfície da Terra. Esses satélites enviam sinais que são captados pelos nossos aparelhos, anunciando o instante em que o sinal foi enviado, e a posição do satélite. Nossos aparelhos, então, utilizam a informação de dois ou mais satélites para inferir a nossa posição por meio de um algoritmo de minimização. Note que a informação do instante em que o sinal foi enviado é fundamental.

(a) Calcule por que fração de segundo os relógios atômicos a bordo desses satélites ficam dessincronizados com os relógios na superfície da Terra após 1 ano em órbita.

(b) Calcule o erro que essa dessincronização dos relógios induziria no nosso posicionamento.

⑦ [2.0] O tensor de curvatura de Riemann é definido como:

$$R^{\sigma}{}_{\mu\,\alpha\,\beta} \equiv \partial_\alpha \, \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - \partial_\beta \, \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda} \, \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\lambda} \, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \; .$$

Pela definição acima é evidente que esse objeto é anti-simétrico pela troca dos últimos dois índices, $R^{\sigma}{}_{\mu\,\alpha\,\beta} = -R^{\sigma}{}_{\mu\,\beta\,\alpha}$.

Nas questões abaixo, vamos utilizar a forma totalmente covariante do tensor de Riemann, dada por $R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta} = g_{\sigma\mu} R^{\sigma}{}_{\nu\,\alpha\,\beta}$.

(a) Mostre que:

$$R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta} = g_{\sigma\lambda} \left(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu} \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \right) + \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu} \right) \; ,$$

onde $g_{\alpha\beta,\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}$.

(b) Mostre que $R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta} = -R_{\nu\,\mu\,\alpha\,\beta} = -R_{\mu\,\nu\,\beta\,\alpha}$

(c) Mostre que $R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta} = R_{\alpha\,\beta\,\mu\,\nu}$

(d) Mostre a identidade de Jacobi aplicada ao tensor de Riemann:

$$R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta} + R_{\mu\,\beta\,\nu\,\alpha} + R_{\mu\,\alpha\,\beta\,\nu} = 0$$

(e) Calcule o número máximo de componentes independentes que o tensor de Riemann pode ter em 4 dimensões.

⑧ [1.0] Uma propriedade fundamental dos tensores é que eles assumem expressões diferentes dependendo do referencial. Porém, se um determinado tensor for zero num dado ponto num certo referencial, então em qualquer referencial esse tensor tem que ser zero naquele ponto. Use esse fato para mostrar que:

(a) Se o tensor de Riemann é não-nulo num certo referencial, então mesmo no referencial localmente inercial ele não vai se anular. Interprete esse resultado surpreendente por meio da definição do tensor de Riemann, em termos da métrica e de suas derivadas.

(b) Use o mesmo tipo de "truque" (ir para o referencial localmente inercial) para demonstrar a identidade de Bianchi:

$$R_{\mu\,\nu\,\alpha\,\beta\,;\,\sigma} + R_{\mu\,\nu\,\sigma\,\alpha\,;\,\beta} + R_{\mu\,\nu\,\beta\,\sigma\,;\,\alpha} = 0 \; .$$