Calculando limites com indeterminações

Abril 2020

A indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Exemplo 1

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

Solução do Exemplo 1

Observe que não consigo resolver este limite de modo imediato pois obtenho $\frac{0}{0}$. Vou usar algumas técnicas álgebricas para tentar uma forma diferente da função apresentada, mesmo que seja para $x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$$

Exemplo 2

Calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + x^2 - 7x + 2}$.

Solução do Exemplo 2

Observo que $x = 2$ anula o numerador e o denominador da função racional, logo é raíz de ambos. Então, sei que tanto o numerador, como o denominador são divisíveis por $(x - 2)$. Sendo assim, executo a divisão polinomial e observo que podemos escrever a função racional dada do seguinte modo:

$$\frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + x^2 - 7x + 2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-2)(x^2+3x-1)} = \frac{(x^2+2x+1)}{(x^2+3x-1)} \text{ para } x \neq 2.$$

Logo, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x^2+2x+1)}{(x^2+3x-1)} = \dfrac{9}{9} = 1$

Exemplo 3

Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$.

Solução Exemplo 3

$\dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$ para $x \neq 1$.

Logo, $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \infty$.

A indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo 1

Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2.$ A simplificação vale para $x \neq 0$.

Exemplo 2

Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2+\frac{5}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{x^2}}{x(1-\frac{1}{x^3})} = 0.$
Observamos que as simplificações valem para $x \neq 0$.

Exemplo 3

Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$ Observamos que a simplificação vale para $x \neq 0$.