Limite de Funções

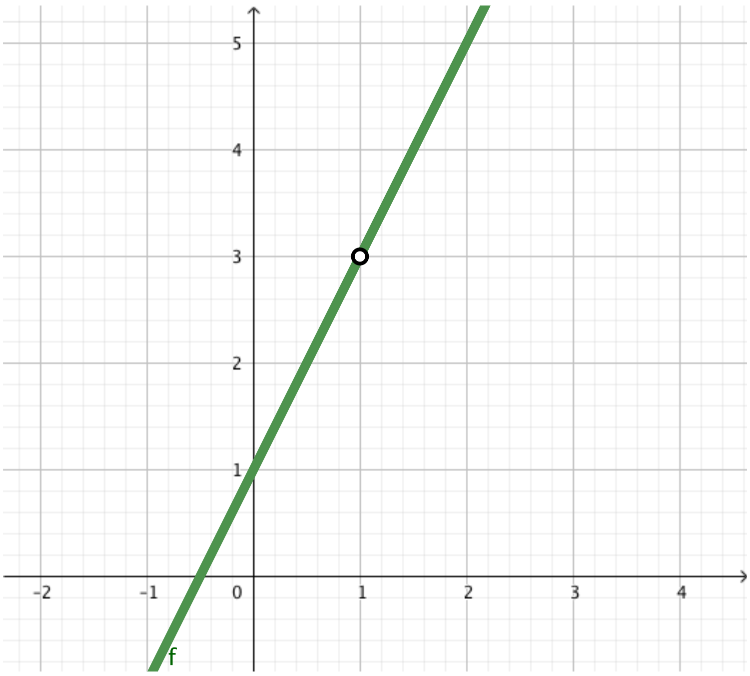
Março 2020

Limite de uma função

Por que calcular limites?

- Estudar o comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não precisa, necessariamente,pertencer ao seu domínio.
- Exemplo: $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Tarefa: Construa uma tabela de valores de x aproximando-se de 1, pela esquerda $(x < 1)$ e pela direita $(x > 1)$ e os correspondentes valores de $f(x)$.

Vejamos o gráfico desta função



- O número 3 é chamado de limite de $f(x)$ quando x está próximo de 1.
- Notação
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$
- Observe que o limite de uma função $y = f(x)$ num ponto b,depende apenas dos valores que f assume nas proximidades de b, ou seja, num pequeno intervalo aberto de centro b.
- Se o limite existe, é um número real, ele é único.

Limites laterais

Limite lateral à direita

O número real L_1 é o limite lateral à direita de $f(x)$ se $f(x)$ se aproxima de L_1 quando x se aproxima de a pela direita, ou seja, x se aproxima de a apenas por valores maiores que a. Notação: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$.

Limite lateral à esquerda

O número real L_2 é o limite lateral à esquerda de $f(x)$ se $f(x)$ se aproxima de L_2 quando x se aproxima de a pela esquerda, ou seja, x se aproxima de a apenas por valores menores que a. Notação: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$.

Limites laterais

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<2 \\ 2, & x=2 \\ -x^2+9 & x>2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 5$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x^2+9) = 5$

Observamos que neste exemplo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$. Neste caso, podemos concluir que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe e é igual a 5.

O limite sempre existe?

Exemplo

Calcular o $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ se existir. Observamos que

$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

Como os limites laterais acima são distintos, concluímos que $f(x)$ não se aproxima de um único valor quando x se aproxima de 2, logo, $\lim_{x\to 2} f(x)$ **não existe**.

Exemplo

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

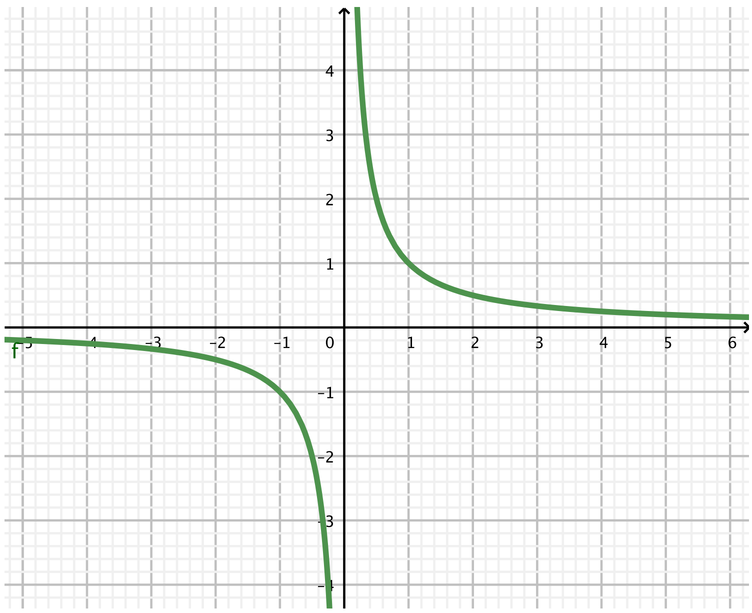
Observe que $x = 0$ não está no domínio desta função. Para entender qual é o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{X^2}$ em uma pequena vizinha perto de 0, faça uma tabela para valores de x próximos de 0 e observe que $f(x) = \frac{1}{X^2}$ se torna arbitrariamente grande. Desta forma, $f(x)$ não está se aproximando de nenhum número finito L, logo este limite **não existe**.

Neste caso, escrevemos $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Limites no Infinito

Vamos explorar o que ocorre com a função para valores de $|x|$ arbitariamente grandes?

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$



Limites no Infinito

$$\lim_{x \to = +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \to = -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Neste caso, dizemos que o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ tem $y = 0$, que é o eixo x, como assíntota horizontal.