Integrais: parte 2

Junho 2020

Propriedades da Integral definida

$-\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

$\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_a^b c dx = c(b-a)$ onde c é qualquer constante.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Exemplo 1

$$\int_0^2 3 \; dx = 3x\Big|_0^2 = 3.2 - 3.0 = 6$$

Exemplo 2

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - x + 2) \; dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - (-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2)$$
$$= \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

Exemplo 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \; dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = -2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$-2\cos(\frac{\pi}{2}) - (-2\cos(0)) = 2.$$

Exemplo 4

O que está errado no seguinte cálculo?
$\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$. Observamos que esse cálculo deve estar errado, pois a resposta é negativa, mesmo com $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ e a propriedade de integrais afirma que $\int f(x)\,dx \geq 0$ quando $f \geq 0$.
Observamos que O Teorema Fundamental do Cálculo aplica-se a funções contínuas, então ele não pode ser aplicado aqui, pois $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não é contínua no intervalo de integração escolhido $[-1, 3]$. De fato, f tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$, portanto $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$ não existe.

Exemplo 5

Calcule

$$\int_1^9 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{x} - 1}{x^2}\, dx = \int_1^9 (2 + x^{1/2} - x^{-2})\, dx = 2x + \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^9 =$$

$$2x + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{x}\Big|_1^9 = (2.9 + \frac{2}{3}.9^{3/2} + \frac{1}{9}) - (2.1 + \frac{2}{3}.1^{3/2} + \frac{1}{1}) =$$

$$18 + 18 + \frac{1}{9} - 2 - \frac{2}{3} - 1 = 33 - \frac{5}{9} = \frac{292}{9}.$$

Exemplo 6 (a)

A função velocidade $v(t) = 3t - 5$ (em metros por segundo) com $0 \leq t \leq 3$ é dada para uma partícula movendo-se ao longo de um reta. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

Solução: (a) O deslocamento é

$$\int_0^3 (3t-5)\, dt = 3\frac{t^2}{2} - 5t\Big|_0^3 = 3\frac{9}{2} - 15 = \frac{27}{2} - 15 = \frac{-3}{2} = s(3) - s(0).$$

Isto significa que a partícula moveu-se $1,5$ para a esquerda.

Exemplo 6 (b)

(b) A distância percorrida pela partícula é

$$\int_0^3 |v(t)|\ dt = \int_0^{5/3} -v(t)\ dt + \int_{5/3}^3 v(t)\ dt = \int_0^{5/3} (-3t+5)\ dt + \int_{5/3}^3 (3t$$

$$-3\frac{t^2}{2} + 5t\Big|_0^{5/3} + 3\frac{t^2}{2} - 5t\Big|_{5/3}^3 = -3\frac{(5/3)^2}{2} + 5(\frac{5}{3}) + 3\frac{3^2}{2} - 5.3$$

$$-3\frac{(5/3)^2}{2} + 5(\frac{5}{3}) = -3\frac{25/9}{2} + \frac{25}{3} + \frac{27}{2} - 15 - 3\frac{25/9}{2} + \frac{25}{3} =$$

$$-\frac{75}{18} + \frac{25}{3} + \frac{27}{2} - 15 - \frac{75}{18} + \frac{25}{3} = -\frac{150}{18} + \frac{50}{3} - \frac{3}{2} = \frac{25}{3} + \frac{50}{3} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{50+100-9}{6} = \frac{141}{6}.$$

Exemplo 7

A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Ache a massa total da barra.
Solução: A massa desta barra é dada por

$$\int_0^4 (9 + 2\sqrt{x})\ dx = 9x + 2.\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = 9.4 + \frac{4}{3}4^{3/2} = 36 + \frac{32}{3} = \frac{140}{3}\ \text{Kg}.$$

Exemplo 8

A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minutos, onde $0 \leq t \leq 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.
Solução: A quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos foi

$$\int_0^{10} (200 - 4t)\ dt = 200t - 4\frac{t^2}{2}\Big|_0^{10} = 200.10 - 2.(10)^2 = 2000 - 200 = 1800$$

litros.