Integrais: parte 1

Junho 2020

Primitiva de uma função

Definição

Seja f uma função definida num intervalo I. Uma **primitiva** de f em I é uma função F definida em I, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo 1

Qual é a primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$? É $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ pois para todo x em $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

Observe que para constante k, $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ é também primitiva de $f(x) = x^2$.

Exemplo 2

A primitiva de $f(x) = 2$ em $\mathbb{R}$ é $F(x) = 2x + k$ pois para todo x em $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = (2x + k)' = 2$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k$ em um intervalo I onde f é contínua

Seja f contínua no intervalo I. Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que $f(x) = k$ para todo x em I.
Seja x_0 um ponto fixo em I. Para todo x em I, $x \neq x_0$, pelo TVM, existe um $\bar{x}$ pertencente ao intervalo aberto de extremos x e x_0 tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0)$$

Como $\bar{x}$ é interior a I, pela hipótese $f'(\bar{x}) = 0$, logo $f(x) - f(x_0) = 0$ ou $f(x) = f(x_0)$ para todo x em I. Tomando $k = f(x_0)$, o resultado segue.

Funções com derivadas iguais

Sejam f e g contínuas no intervalo fechado I. Se $f'(x) = g'(x)$ em todo x interior a I, então existirá uma constante k tal que

$$g(x) = f(x) + k$$

para todo x em I.

Demonstração:

A função $h(x) = g(x) - f(x)$ é contínua em I e para todo x interior a I, $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$. Então existe uma constante k tal que $g(x) - f(x) = k$ ou $g(x) = f(x) + k$ para todo x em I.

Família de primitivas

Se F é uma primitiva de f em I, então, para toda constante k, $F(x) + k$ é também uma primitiva de f. Por outro lado, se duas funções possuem derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Assim, as **primitivas** de f em I são as funções da forma $F(x) + k$, com k constante.

$$y = F(x) + k$$

é a família das primitivas de f em I com k constante.
$\int f(x)dx$ é a notação para a família de primitivas de f.

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

que também é denominada **integral indefinida de** f.

Exemplo 3

a) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$ pois $\left(\frac{x^3}{3} + k\right)' = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$

b) $\int dx = \int 1dx = x + k$ pois $(x)' = 1$

Exemplo 4

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + k$

c) $$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + k$$

Exemplo 5

Calcular a $\int x^\alpha dx$, $\alpha \neq -1$ é um número real fixo. Observamos que $\left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]' = x^\alpha$. Logo, $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$

Exemplo 6

$\int \frac{1}{x}dx = (\ln x) + k, (x > 0)$ pois $(\ln x + k)' = \frac{1}{x}$ ou

$\int \frac{1}{x}dx = (\ln(-x)) + k, (x < 0)$ pois $(\ln(-x) + k)' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

Logo, $\int \frac{1}{x}dx = (\ln |x|) + k$ para todo $x \neq 0$.

Exemplo 7

a) Para $\alpha \neq 0$ real fixo, $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + k$

b) $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + k$

Exemplo 8

a) $\int \sin x dx = -\cos x + k$ pois $(-\cos x + k)' = -(-\sin x) = \sin x$

b) $\int \cos x dx = \sin x + k$ pois $(\sin x + k)' = \cos x$

O Problema de cálculo de áreas

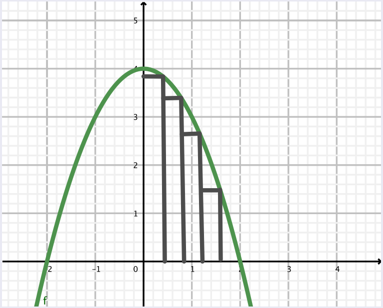
As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2.500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado método da exaustão.

- Os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, em seguida, somando as áreas obtidas.
- Para achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles.
- Queremos encontrar a área A de figura plana limitadas por curvas. Ideia: Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos, então calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

Área sob um gráfico

Exemplo 9

Calcular a área da região entre o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4$ e o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 2$.



Para tal, vamos calcular uma aproximação desta área dividindo a região em 5 retângulos e somando suas áreas. Observamos que $\Delta x = \frac{2}{5} = 0,4$. Sejam $x_0 = 0, x_1 = 0,4, x_2 = 0,8, x_3 = 1,2, x_4 = 1,6, x_5 = 2$ que escolherei como pontos amostrais neste caso. Então
$R_5 = (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5))\Delta x =$
$(3,84 + 3,36 + 2,56 + 1,44 + 0)(0,4) = (11,2)(0,4) = 11,6.$
Observamos que ao subdividirmos a região em mais retângulos, melhoramos a aproximação para esta área.

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

Integral definida

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_n = b$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a até b é $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ é chamada de **soma de Riemann**.

Como calcular a integral definida?

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial foi motivado pelo problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como vimos anteriormente.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for contínua em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Exemplo 10

Calcule a integral $\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1) = e^3 + k - (e + k) = e^3 - e$
Observamos que podemos desconsiderar a constante no caso caso da integral definida pois elas se cancelam no processo de integração de acordo com o TFC.

Exemplo 11

Ache a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

A área A pedida é encontrada usando-se $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) =$ $\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$