Funções Contínuas

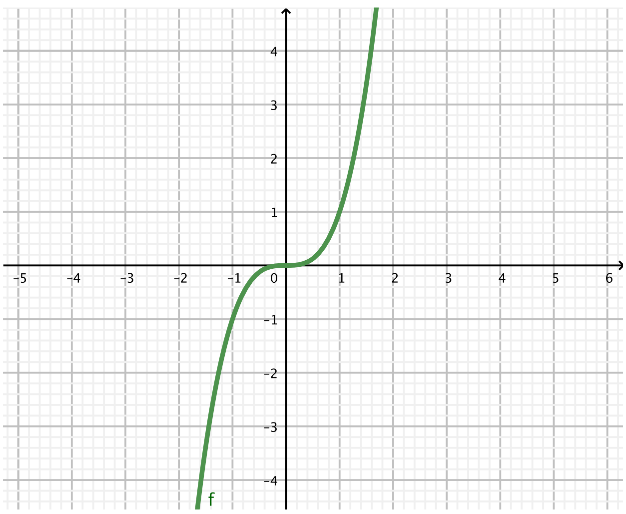
Abril 2020

Funções Contínuas

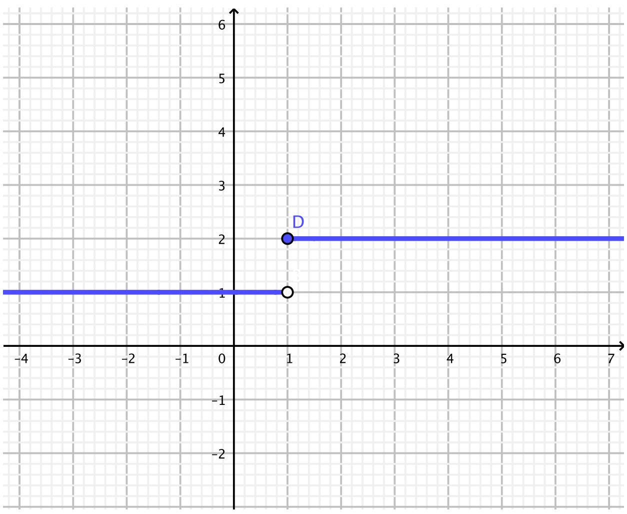
Definição

Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = p$ do seu domínio se e somente se $\lim_{x \to p} f(x)$ existe e $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

(1)



(2)



Na figura(1)

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1) = 1$, logo esta função é contínua no ponto $x = 1$.

Na figura(2)

$\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe, logo esta função não é contínua no ponto $x = 1$.

Dizemos simplesmente que uma função é contínua, quando ela é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Se $\lim_{x\to p} f(x)$ existe, é possível a função ser descontínua em p ?

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

Solução

Para $x \neq 1, f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$. Desta forma, para $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, logo

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1) = 3.$$

Neste caso, o $\lim_{x\to 1} f(x)$ **existe**, porém é diferente de $f(1)$. Logo a função é **descontínua** em $x = 1$.

Alguns exemplos de funções contínuas

Função constante

$\lim_{x\to p} k = k = f(p)$, k constante.

Funções polinomiais

ex 1) $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4 = f(2)$, função linear.

ex 2) $\lim_{x\to 1}(5x^2 - x) = 4 = f(1)$, função quadrática

ex 3) $\lim_{x\to 1}(3x^6 - \frac{1}{3}x^5 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}) = \frac{8}{3} + 2\sqrt{2} = f(1)$

Funções racionais

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^5 + 6x + 1}{x^2 - 3} = 4 = f(-1).$$

Observamos que uma função racional $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ onde $g(x)$ e $h(x)$ são funções polinomiais. Assim, $f(x)$ é contínua em todo ponto p que não anula o denominador, isto é, $f(x)$ é contínua.

Exercício

Determine L para que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ L, & x = 2 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 2$.

Solução

Observamos que $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2} = \dfrac{(x^2+2x+4)(x-2)}{(x-2)} = x^2+2x+4$ para $x \neq 2$. Logo, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x^2+2x+4 = 12$. Logo, para que a função dada seja contínua em $x = 2$, é necessário que ocorra $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = 12 = f(2)$. Então precisaremos definir $L = 12$.