Regras de derivação: parte 4

Maio 2020

O que é uma função composta?

Definição

Sejam f e g duas funções tais que $Imf \subseteq D_g$. A função dada por $y = g(f(x))$, $x \in D_f$, denomina-se função composta de g e f. Notação: $g \circ f = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in D_f$.

Exemplos

a) Sendo f e g dada por $f(x) = 2x + 1$, $g(y) = y^{100}$,
$g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^{100}$;

b) Sendo f e g dada por $f(x) = x^2 - 1$, $g(y) = \cos y$,
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \cos(x^2 - 1)$;

c) Sendo f e g dada por $f(x) = 6x - 1$, $g(y) = e^y$,
$g \circ f(x) = g(f(x)) = e^{6x-1}$;

Como calcular derivada de função composta?

Regra da Cadeia

Sejam $y = f(x)$ e $g(y)$ duas funções deriváveis, com $Im_f \subseteq D_g$. Então a composta $h(x) = g(f(x))$ é derivável e vale $\boxed{h'(x) = g'(f(x))f'(x)}$.

Exemplo a)

Sendo f e g dada por $f(x) = 2x + 1$, $g(y) = y^{100}$,
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^{100}$;
$h'(x) = 100(2x + 1)^{99}(2x + 1)' = 200(2x + 1)^{99}$;

Exemplo b)

Sendo f e g dada por $f(x) = x^2 - 1$, $g(y) = \cos y$,
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \cos(x^2 - 1)$;
$h'(x) = (-\sin(x^2 - 1))(x^2 - 1)' = (-\sin(x^2 - 1))(2x) = -2x\sin(x^2 - 1)$.

Exemplo c)

Sendo f e g dada por $f(x) = 6x - 1$, $g(y) = e^y$,
$g \circ f(x) = g(f(x)) = e^{6x-1}$;
$h'(x) = e^{6x-1}(6x - 1)' = (e^{6x-1}).6 = 6e^{6x-1}$.

Algumas regras de derivação para funções compostas

a) $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} f'(x)$
b) $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
c) $(\cos f(x))' = -f'(x) \sin f(x)$
d) $(\sin f(x))' = f'(x) \cos f(x)$
e) $((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$

Derivada da função exponencial $y = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ constante

$a^x = e^{x \ln a}$. Então $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a}(\ln a) = a^x \ln a$

Exemplo

Calcular a derivada da função $y = 8^x + \log_2 x$.

Observamos que $\log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}$.

Então $y' = 8^x \ln 8 + \frac{1}{x \ln 2}$