Regras de derivação: parte 3

Maio 2020

Observamos que existe $r > 0$ tal que $\boxed{0 < \sin x < x < \tan x}$ para $0 < x < r$.

Dividindo por $\sin x$ obtemos $\boxed{1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}}$, portanto, para $0 < x < r$, $\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$

Por outro lado, $-r < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < r \Rightarrow \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$. Como $\cos(-x) = \cos x$ e $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, temos que para $-r < x < 0$ também vale $\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$.

Logo, para todo x com $0 < |x| < r$, vale $\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$. Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (1).

Calculando $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+\cos x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{(1+\cos x)} = 1.\frac{0}{2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0} \quad (2)$$

Derivadas das Funções Trigonométricas

Derivada de $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) \cos x = \cos x,$$ usando os limites (1) e (2) calculados acima. Então $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

Derivada de $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \lim_{h \to 0} \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right) = -\sin x,$$ usando os limites (1) e (2) calculados acima. Então $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Derivada de $f(x) = \mathrm{tg}\ x$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Então $\boxed{(\mathrm{tg}\ x)' = \sec^2 x}$

Derivadas de outras funções trigonométricas

Exercício

Usando as regras de derivação, mostre que:

1. $(\sec x)' = \sec x \mathrm{tg}\ x$,
2. $(\mathrm{cotg}\ x)' = -\mathrm{cosec}^2\ x$,
3. $(\mathrm{cosec}\ x)' = -\mathrm{cosec}\ x\ \mathrm{cotg}\ x$.

Exemplos de aplicações das regras de derivação

Calcular as seguintes derivadas:

a) $f(x) = x\cos x$,
$f'(x) = x'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x}$,
$$f'(x) = \frac{(x+1)'\ln x - (x+1)(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - (x+1)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x(\ln x - 1) - 1}{x(\ln x)^2}$$

c) $f(x) = e^x \mathrm{tg}\ x$,
$f'(x) = e^x \mathrm{tg}\ x + e^x \sec^2 x$