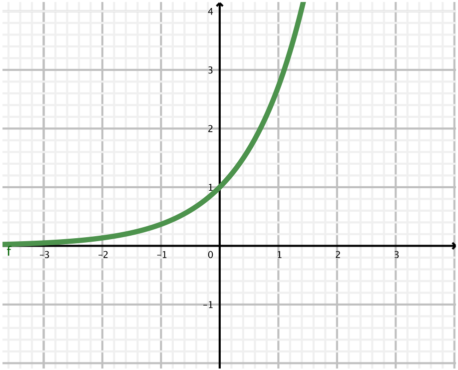
Regras de derivação: parte 2

Maio 2020

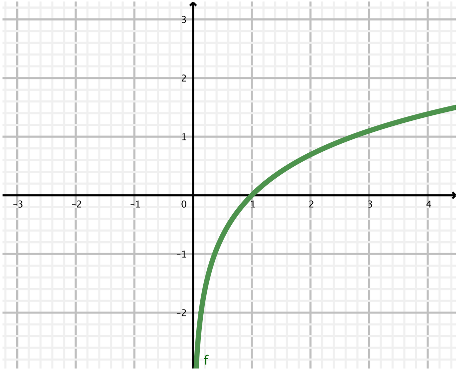
A função $f(x) = e^x$

A função exponencial de base $e \cong 2,718281$, ou seja, $f(x) = e^x$ é a função exponencial cuja reta tangente ao seu gráfico no ponto $(0,1)$ possui inclinação 1. O domínio da função $f(x) = e^x$ são todos os números reais $\mathbb{R}$. A imagem da função $f(x) = e^x$ é $Im_f = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$



A função $f(x) = \ln x$

A função $f(x) = \ln x$ é a função logarítimo na base e, ou seja, $\ln x = \log_e x$. Temos então $\boxed{y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x}$
Domínio de $f(x) = \ln x$ é $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. A imagem de $f(x) = \ln x$ são todos os nímeros reais $\mathbb{R}$.



$\lim_{\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Calcular $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$
Basta fazer $h=\frac{1}{x}(h\to 0^{\pm}\Rightarrow x\to\pm\infty)$, temos
$\lim_{h\to 0^{\pm}}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Logo, vale que

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e} \tag{1}$$

Calcular $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$.
Basta fazer $u=e^h-1$ ou $h=\ln(1+u)$, Assim temos
$\dfrac{e^h-1}{h}=\dfrac{u}{\ln(1+u)}=\dfrac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$. Observamos que $h\to 0\Rightarrow u\to 0$;

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1} \tag{2}$$

A derivada de $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$.

Faça $u = \frac{h}{x}$, então

$\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \ln\left(1 + \dfrac{h}{x}\right) = \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{xu}} = \lim_{u\to 0} \dfrac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \dfrac{1}{x}$ por (1), para $x > 0$.

A derivada de $f(x) = e^x$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right) = e^x$ pois $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ por (2).

Exemplos

Exemplo1

Calcular a derivada da função $g(x) = (x^3 - 2x - 1).e^x$
$g'(x) = (3x^2 - 2)e^x + (x^3 - 2x - 1)e^x = e^x(x^3 + 3x^2 - 2x - 3)$

Exemplo 2

Calcular a derivada da função $h(x) = \dfrac{\ln x}{(x-2)}$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2) - \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x(1-\ln x) - 2}{x(x-2)^2}$$