Calculando derivadas

Abril 2020

Calculando derivadas

A derivada de uma constante

Seja $f(x) = k$ uma função constante. Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x.

Solução: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

A derivada de $f(x) = x$

Seja $f(x) = x$. Prove que $f'(x) = 1$ para todo x.

Solução: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

Derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule $f'(2)$

Solução: $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$

$\lim_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$

$\lim_{h \to 0} \dfrac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \dfrac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Derivada de $f(x) = x^n$ para $n \neq 0$ natural

Solução: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$.

Vamos fazer uma troca de variável: $x + h = t$. Observe que $t \to x$ quando $h \to 0$. Logo, $f'(x) =$

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1})}{t - x} =$$

$$\lim_{t \to x} t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1} =$$

$x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$ pois é a soma de n parcelas iguais.