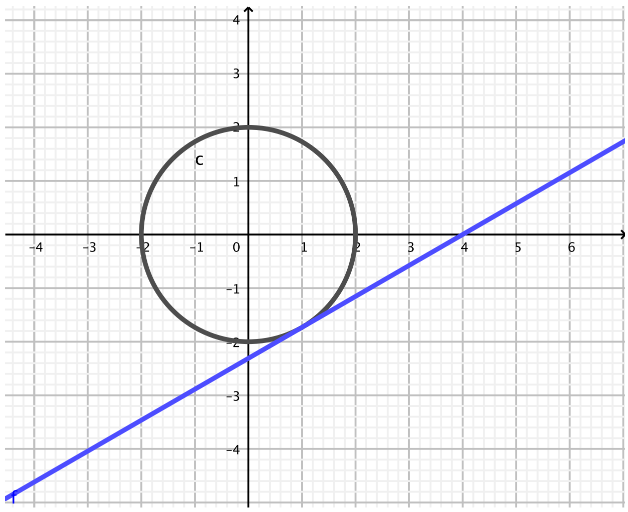
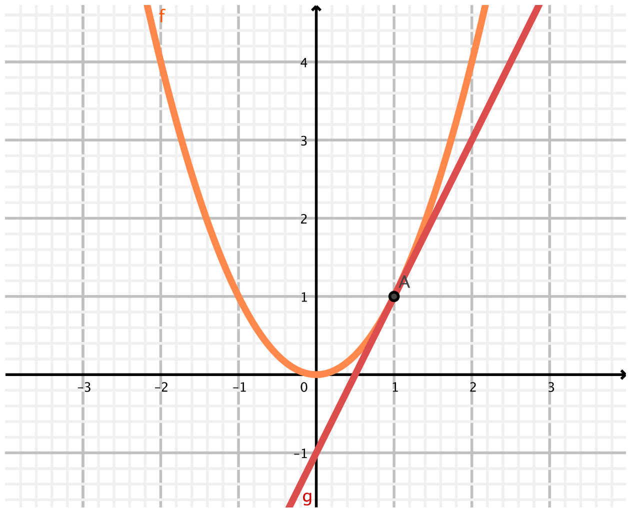
Derivada: Definição e motivações

Abril 2020

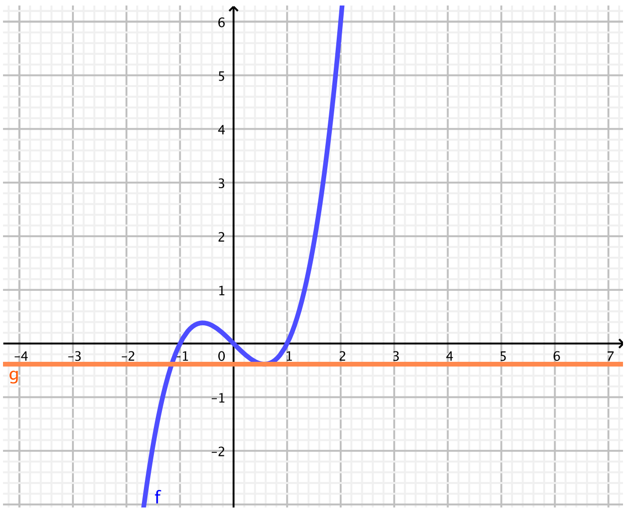
Problema 1: Definir a reta tangente à uma curva em um ponto

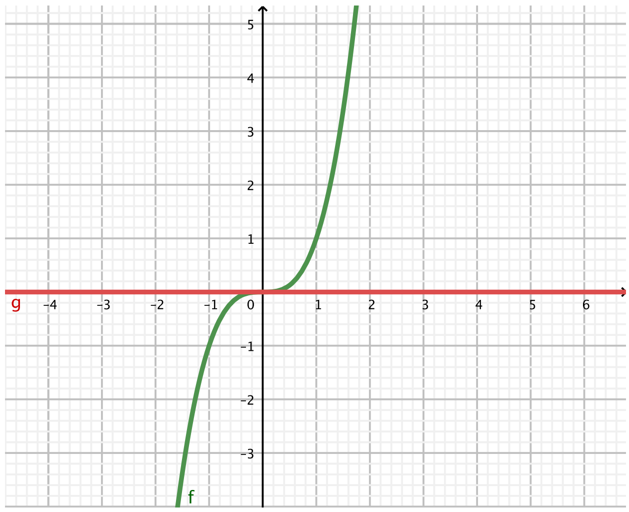
A reta tangente "toca"a curva em um único ponto.

(1) 

(2) 

A reta tangente "toca" a curva em um único ponto (????)

(3) 

(4) 

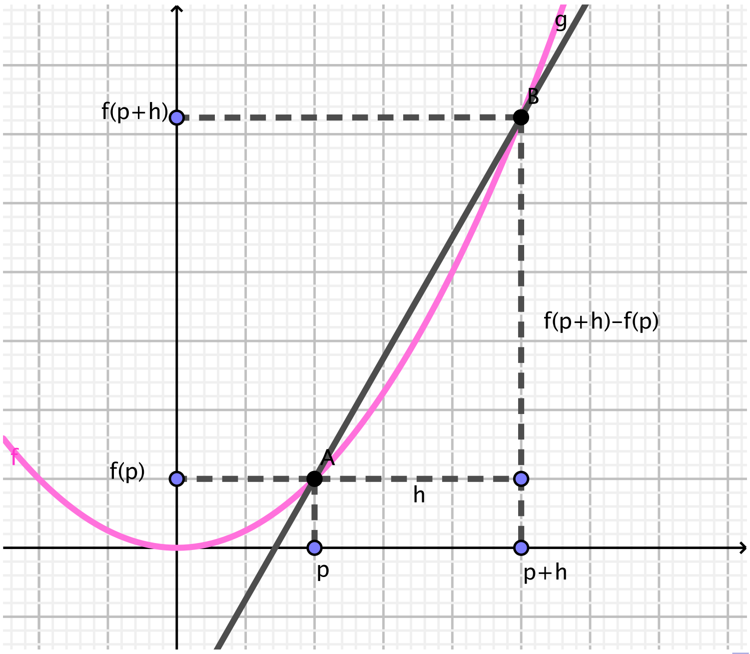
No exemplo (3), a reta tangente encontra a curva em dois pontos: no ponto em que é tangente, a reta apenas "toca" a curva e no outro ponto, a reta atravessa a curva.

No exemplo (4), a reta tangente intercepta a curva em um único ponto, porém a reta "atravessa" a curva.

Buscando uma definição mais precisa para reta tangente à uma curva em um ponto A

Passo 1

Definir uma reta secante que passa pelos pontos A =(p,f(p)) e B =(p+h, f(p+h)).



Calcular inclinação da reta secante

Inclinação da reta secante: $m_s = \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}$

Passo 2: Definir a inclinação da reta tangente à curva no ponto A

Na verdade, isto é mais que um passo, é o "pulo do gato"

Desvendando a técnica deste "pulo do gato"

A ideia é aproximar o ponto B de do ponto A tanto quanto se queira. Ao fazer isto, a distância entre as coordenadas p e p+h fica tão pequena quanto se queira, ou seja, tende para zero. A inclinação obtida através deste processo é definida como a inclinação da reta tangente à curva no ponto A.

Como este processo é descrito na linguagem matemática?

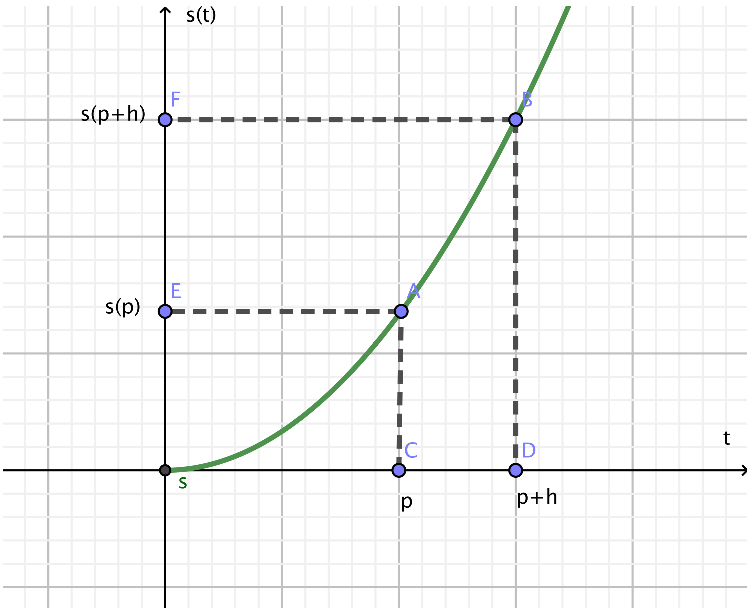
Ao denotar m_t como a inclinação da reta tangente à curva f podemos escrever: $\boxed{m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}}$

Desta maneira a reta tangente t à curva dada por f fica definida: conhecemos sua inclinação m_t e um ponto A por onde ela passa. Logo temos sua equação:

$$y - f(p) = m_t(x - p)$$

Problema 2: Encontrar a velocidade instantânea de um objeto em movimento

Suponha que um objeto está em movimento e sua tragetória é representada pelo gráfico abaixo. A velocidade média entre as posições A e B pode ser calculada como $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(p+h) - s(p)}{h}$



Velocidade Instatânea

E aqui acontece o mesmo "pulo do gato"

Para definir a velocidade no instante $t = p$, a ideia é aproximar a posição do ponto B da posição do ponto A tanto quanto se queira. A velocidade obtida a partir deste processo é chamada de velocidade instantânea no ponto A. Observe que neste processo a diferença entre as abcissas dos pontos A e B : (p+h)-p = h fica tão pequena quanto se queira, ou seja, tende para zero.

Como este processo é descrito na linguagem matemática?

Ao denotar v_p como a velocidade no instante p, podemos escrever:

$$\boxed{v_p = \lim_{h \to 0} \frac{s(p+h) - s(p)}{h}}$$

A Reta Tangente & A Velocidade Instantânea & A Derivada

- Observe que o mesmo tipo de limite que aparece na definição da inclinação da reta tangente à uma curva no ponto A : m_t no Problema 1, também aparece na definição da velocidade no instante $t = p$: v_p no Problema 2.
- Este limite é muito importante pois ele resolve os problemas onde queremos encontrar uma taxa de variação instatânea de uma função em um determinado ponto.
- Este limite "superstar", quando existir e for finito é chamado de **derivada** de $f(x)$ em $x = p \in D_f$.
- Notação: $\boxed{f'(p) = \dfrac{df(p)}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}}$
- Quando este limite existe em um ponto p do domínio da função dizemos que $f(x)$ é **derivável** em p. Dizemos que $f(x)$ é derivável em $A \subseteq D_f$ quando $f(x)$ é derivável em todos os pontos de A.

Cálculo da reta tangente à curva dada por $y = f(x)$ em um ponto dado $(p, f(p))$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ **no ponto** $(-1, f(-1))$.
A equação da reta tangente em $(-1, f(-1))$ é

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$$

Precisamos calcular: $f(-1)$ e $f'(-1)$.
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 - (-1)^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1 - 2h + h^2) - (+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-2 + h) = -2.$$

Logo, segue a equação da reta com as substituições realizadas:
$y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$

Cálculo da velocidade instatânea de uma partícula cuja posição é dada pela função $s(t)$ em um ponto dado $(p, s(p))$

Suponha que uma partícula move-se ao longo do gráfico de $s(t) = t^2 + 3t$ **dado em metros para** $t \geq 0$**. Encontre a velocidade no instante** $t = 2$ **segundos**.

Como já vimos,

$$v_2 = \lim_{h\to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - (2^2 + 3.2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 4 - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 7h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+7)}{h} =$$

$\lim_{h\to 0} h + 7 = 7m/s$

Cálculo de uma taxa de variação instantânea

Exercício

Suponha que a água esteja sendo drenada de um tanque e $V = 250(1600 - 80t + t^2)$ litros nos fornece o volume de água deste tanque em t minutos após começar o escoamento. Calcule com que rapidez a água está fluindo do tanque 5 minutos após o início do escoamento.

Analisar a rapidez de escoamento da água em 5 minutos de escoamento da água é calcular $\dfrac{dV(5)}{dt} = v'(5)$.