Estudo da variação de funções: parte 2

Junho 2020

Exemplo 1

Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$.

1) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

2) Intervalos de crescimento e decrescimento:

$f'(x) = \dfrac{(4x^3)(x^2) - (x^4+1)(2x)}{x^4} = \dfrac{2x^5 - 2x}{x^4} = \dfrac{2x(x^4-1)}{x^4} = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3} = \dfrac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$. Como $\frac{2(x^2+1)}{x^2} > 0$, o sinal de $f'(x)$ será dado por $\frac{(x^2-1)}{x}$. Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, -1)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(-1, 0)$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(0, 1)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(1, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

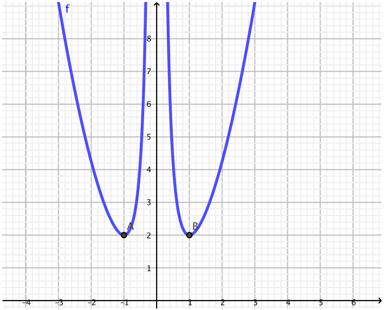
f tem um **mínimo local** em $x = -1$ pois a função decresce antes de $x = -1$ e cresce depois de $x = -1$. f tem um **mínimo local** em $x = 1$ pois a função decresce antes de $x = 1$ e cresce depois de $x = 1$.

3) Concavidade e pontos de inflexão: $\boxed{f''(x) = 2 + 6x^{-4}}$ Como $f''(x)$ não se anula e a expressão é sempre positiva temos:

Intervalos	Sinal de $f''(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, 0)$	$+$	Concavidade para cima
$(0, +\infty)$	$+$	Concavidade para cima

Como não ocorreu mudança de concavidade, não há **ponto de inflexão**.

4) Limites laterais de f em 0.
$\lim_{x\to 0^+}(x^2 + \frac{1}{x^2}) = +\infty = \lim_{x\to 0^-}(x^2 + \frac{1}{x^2})$
5) $\lim_{x\to +\infty}(x^2 + \frac{1}{x^2}) = +\infty = \lim_{x\to -\infty}(x^2 + \frac{1}{x^2})$



6) f não possui raízes.

Máximos e mínimos globais

- f tem um **mínimo global** em p se $f(p)$ for menor ou igual a todos os valores de f.
- f tem um **máximo global** em p se $f(p)$ for maior ou igual a todos os valores de f.

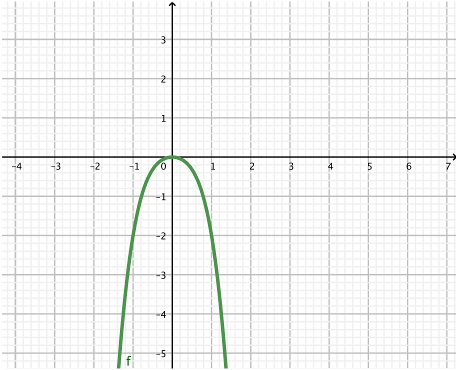
Exemplo 2

Estude os máximos e/ou mínimos globais de $f(x) = -x^4 - x^2$. Calculamos $f'(x) = -4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow -2x(2x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ é ponto crítico.

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão
$(-\infty, 0)$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(0, +\infty)$	$-$	$f(x)$ é decrescente

Logo f tem um máximo local em $x = 0$ e $f(0) = 0$ é um valor máximo local de f. Porém, observamos que a função $f(x) = -x^4 - x^2 \leq 0$, logo 0 é máximo global de f. Esta função não possui mínimo global.

Gráfico de $f(x) = -x^4 - x^2$



Máximos e mínimos em um intervalo fechado

Teorema de Weierstrass

Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. Ou seja, f tem um máximo global e um mínimo global neste intervalo.

O Teorema de Weierstrass garante a existência de máximos e mínimos globais de uma função contínua em um intervalo fechado $a \leq x \leq b$. Para encontrá-los seguimos o roteiro:

- Determinar os pontos críticos de f no intervalo;
- Calcule o valor da função nos pontos críticos e nos extremos a e b;
- O maior deles é o máximo global, o menor deles é o mínimo global.

Exemplo 3

Determine os máximos e mínimos globais de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ no intervalo $[-5, 12]$.
Vamos encontrar os pontos críticos
$f'(x) = 3x^2 - 18x - 48 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = 8$ que são os pontos críticos e estão no intervalo $[-5, 12]$. Calculamos o valor de f nos pontos críticos e nos extremos do intervalo:
$f(-5) = (-5)^3 - 9(-5)^2 - 48(-5) + 52 = -58,$
$f(-2) = (-2)^3 - 9(-2)^2 - 48(-2) + 52 = 104,$
$f(8) = (8)^3 - 9(8)^2 - 48(8) + 52 = -396,$
$f(12) = (12)^3 - 9(12)^2 - 48(12) + 52 = -92.$
Comparando todos esses valores da função, vemos que o maior deles é 104 que é então o máximo global em $[-5, 12]$ que ocorre em $x = -2$ e que o menor deles é -396 que ocorre em $x = 8$ que é o mínimo global em $[-5, 12]$.

Exemplo 4

Para uma constante positiva b, a função pico $f(t) = te^{-bt}$ fornece a quantidade de uma droga no corpo no instante $t \geq 0$. (a) Determine os máximos e mínimos globais de $f(t)$ para $t \geq 0$. (b) Determine o valor de b para o qual $t = 10$ seja o máximo global.

Solução: (a)

$f'(t) = e^{-bt} + te^{-bt}(-b) = e^{-bt}(1 - bt) = 0 \Rightarrow 1 - bt = 0 \Rightarrow t = 1/b$.

Então existe um ponto crítico em $t = 1/b$. O sinal de f' é dado pelo sinal de $(1 - bt)$.

Intervalos	Sinal de $f'(t)$	Conclusão
$(0, 1/b)$	$+$	$f(t)$ é crescente
$(1/b, +\infty)$	$-$	$f(t)$ é decrescente

Então o máximo local ocorre em $t = 1/b$. Observamos que em $t = 0$, que é o extremo inferior do intervalo semi-aberto deste problema, $f(0) = 0$ e como $f(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, podemos concluir que ocorre o mínimo global no instante $t = 0$ e o máximo global em $t = 1/b$ que é $f(1/b) = (1/b)e^{-b(1/b)} = \frac{e^{-1}}{b}$. (b) $1/b = 10 \Rightarrow b = 0,1$

Exemplo 5

Quando você tosse, sua traqueia contrai. A velocidade, $v(r)$, com a qual você expele o ar depende do raio r, da sua traqueia. Se a for o raio normal (em repouso) da sua traqueia, então $0 \leq r \leq a$, a velocidade é dada por $v(r) = k(a - r)r^2$ onde k é uma constante positiva. Que valor de r maximiza a velocidade? Para qual valor a velocidade é minimizada?

Solução: Para $0 \leq r \leq a$, a velocidade com a qual o ar é expelido é dada por: $v(r) = k(a - r)r^2 = kar^2 - kr^3$.

$v'(r) = 2kar - 3kr^2 = 2kr\left(a - \frac{3}{2}r\right) = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = \frac{2}{3}a$. Estes são os pontos críticos de v. Calculamos o valor de v nos pontos críticos e nos extremos do intervalo: $v(0) = 0$,

$v\left(\frac{2}{3}a\right) = k\left(a - \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = k\left(\frac{a}{3}\right)\frac{4a^2}{9} = \frac{4ka^3}{27}$,

$v(a) = k(a - a)a^2 = 0$.

Comparando todos esses valores da função, vemos que o maior deles é $\frac{4ka^3}{27}$ que é então o máximo global em $[0, a]$ que ocorre em $r = \frac{2}{3}a$ e que o menor deles, é o mínimo global 0 que ocorre em $r = 0$ e $r = a$.

Exemplo 6

Quais são as dimensões de uma lata de alumínio cuja capacidade é de 400 ml de suco e que use o mínimo de material? Suponha que a lata seja cilíndrica e fechada em ambas as extremidades.

Solução: Precisamos modelar buscando uma fórmula para o material usado na confecção da lata.

M = material usado na lata = material das extremidades + material na lateral

onde Material das extremidades = 2 (área de um círculo de raio r) = $2\pi r^2$

e

Material na lateral = área da superfície cilíndrica com altura h e raio $r = 2\pi rh$.

Temos $\boxed{M = 2\pi r^2 + 2\pi rh}$

Continuação da resolução

Volume da lata $= \pi r^2 h = 400 \Rightarrow h = \frac{400}{\pi r^2}$
Substituindo h na equação do material da lateral:
$M = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{400}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}$. O domínio desta função é $r > 0$ porque o raio da lata não pode ser negativo e nem zero.
Agora vamos minimizar a função $M = M(r) = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}$
$M'(r) = 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{800}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3,99cm$; logo a altura $h = \frac{400}{\pi(3{,}99)^2} \approx 7,99cm$.
Então o material mínimo utilizado será
$M = 2\pi(3,99)^2 + \frac{800}{3{,}99} \approx 300,53cm^2$.
Como saber se de fato o raio r obtido é onde ocorre o mínimo global?

Intervalos	Sinal de $M'(r)$	Conclusão
$(0; 3,99)$	$-$	$M(r)$ é decrescente
$(3,99; +\infty)$	$+$	$M(r)$ é crescente

Pelo estudo de intervalos de crescimento e decrescimento acima, obtemos a confirmação de que de fato o mínimo global ocorre em $r = 3,99cm$.