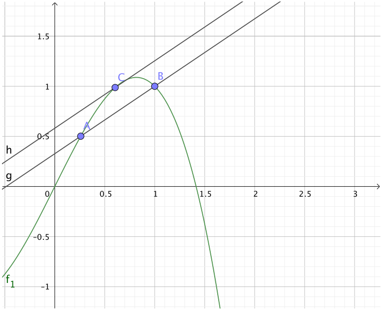
Estudo da variação de funções

Maio 2020

Teorema do Valor Médio

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Seja g reta que passa por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, então existe um pelo menos um ponto $C = (c, f(c))$ com $a < c < b$, tal que a reta h tangente ao gráfico de f neste ponto é paralela à reta g.

Consequência do Teorema do Valor Médio

Se f é contínua num intervalo I e $f'(x) > 0$ para todo x no interior de I, então f será estritamente crescente em I.

Demonstração

Sejam a e b no intervalo I com $a < b$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Como $f'(c) > 0$ pois x está no interior de I, temos $f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$. Desta forma, f será estritamente crescente em I.

Se f é contínua num intervalo I e $f'(x) < 0$ para todo x no interior de I, então f será estritamente decrescente em I. Este resultado segue do TVM, de modo análogo como o que foi feito acima.

Exemplo 1

Considere a função $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$. Vamos estudar o sinal da função derivada: $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x - 48 = 0 = 3(x+2)(x-8) \Rightarrow x = -2$ ou $x = 8$.

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão
$(-\infty, -2)$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(-2, 8)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(8, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

Exemplo 2

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$. Esboce o gráfico.

Solução: Estudar o sinal da função derivada $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 = 3(x-1)(x-\frac{1}{3}) \Rightarrow x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$.

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

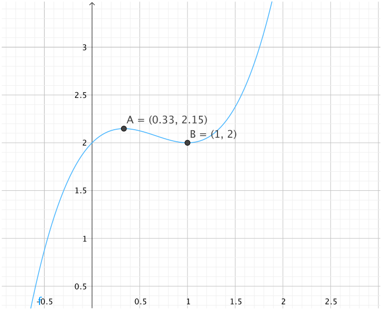
Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão
$(-\infty, \frac{1}{3})$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(\frac{1}{3}, 1)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(1, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

Mais pistas sobre $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 2) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 2) = -\infty$

Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$



f tem um **máximo local** em $x = \frac{1}{3}$ pois $f\left(\frac{1}{3}\right)$ é o maior valor de f para pontos próximos de $\frac{1}{3}$.

f tem um **mínimo local** em $x = 1$ pois $f(1)$ é o menor valor de f para pontos próximos de 1.

Máximos e Mínimos Locais

Definições

Suponha que p seja um ponto do domínio de f:

- f tem um **mínimo local** em p se $f(p)$ for menor ou igual aos valores de f para pontos próximos a p.
- f tem um **máximo local** em p se $f(p)$ for maior ou igual aos valores de f para pontos próximos a p.

Quem são os candidatos a extremos locais?

São os pontos que possuem uma das seguintes características: p no domínio de f tal que:

1. $f'(p) = 0$ ou
2. $f'(p)$ não está definida.

O ponto que possui uma das características acima é chamado de **ponto crítico** e $f(p)$ é chamado de **valor crítico**.

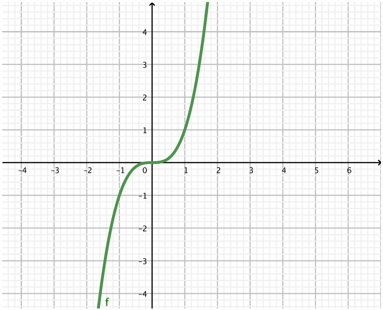
Extremos locais e os pontos críticos

Teorema: Seja f definida em um intervalo e tenha um máximo ou mínimo local no ponto $x = p$, que não é extremo do intervalo. Se f for diferenciável em $x = p$, então $f'(p) = 0$. Portanto, p é um ponto crítico.

Demonstração

Suponha que f tenha um máximo local em $x = p$. Supondo que $f'(p)$ seja definida, obtemos: $f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Então, $f'(p) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Pela definição de máximo local, $f(p+h) \leq f(p)$ para todo h suficientemente pequeno. Então $f(p+h) - f(p) \leq 0$ para h suficientemente pequeno. O denominador h é positivo quando calculamos o limite quando $h \to 0^+$ e negativo quando calculamos o limite quando $h \to 0^-$. Então $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leq 0$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geq 0$ e como estes limites são iguais, obtemos $f'(p) = 0$. A demonstração para um mínimo local em $x = p$ é análoga.

Porém, nem todo ponto crítico é máximo ou mínimo local. Considere a função $f(x) = x^3$ que tem como ponto crítico $x = 0$. Porém não existe nem máximo e nem mínimo local em $x = 0$. Observe que $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Porém, como o sinal da derivada é positivo para todo $x \neq 0$, vemos que a função cresce antes de $x = 0$ e cresce depois, então em $x = 0$ não ocorre extremo local.



Exemplo 3

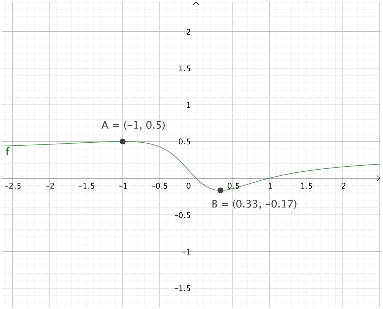
Estudar a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ com relação ao crescimento e decrescimento.$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2}$. Como $(1 + 3x^2)^2 > 0$ para todo x, o sinal de f' é o mesmo que o do numerador. $3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$.Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão
$(-\infty, -1)$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(-1, \frac{1}{3})$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(\frac{1}{3}, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

Mais pistas sobre $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 3} = \frac{1}{3}$,

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2} = \frac{1}{3}$. Com isto concluímos que a reta $y = \frac{1}{3}$ é uma assíntota horizontal.

Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$



f tem um **máximo local** em $x = -1$ pois $f(-1)$ é o maior valor de f para pontos próximos de -1.

f tem um **mínimo local** em $x = \frac{1}{3}$ pois $f(\frac{1}{3})$ é o menor valor de f para pontos próximos de 1.

Estudo da concavidade

Seja f derivável em um intervalo aberto I, seja p um ponto em um intervalo I. A reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$ é dada pela equação $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$.

f tem concavidade para cima em I se $f(x) > T(x)$ para quaisquer x e p em I com $x \neq p$.

f tem concavidade para baixo em I se $f(x) < T(x)$ para quaisquer x e p em I com $x \neq p$.

Teorema

Seja f uma função que admite derivada até segunda ordem no intervalo aberto I.

a) Se $f''(x) > 0$ em I, então f terá a concavidade para cima em I.

b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f terá a concavidade para baixo em I.

Demonstração

a) Queremos mostrar que para quaisquer x e p em I, com $x \neq p$, $f(x) > T(x)$. Vamos considerar a função $g(x) = f(x) - T(x)$ com $x \in I$ e provar que $g(x) > 0$ para todo$x$ em I com $x \neq p$.
Observamos que $g'(x) = f'(x) - T'(x)$, $T'(x) = f'(p)$. Disto temos $g'(x) = f'(x) - f'(p)$ com $x \in I$. Como $f''(x) > 0$ em I, segue que f' é estritamente crescente em I. Então $g'(x) > 0$ para $x > p$ e $g'(x) < 0$ para $x < p$. Deste fato concluímos que g é estritamente decrescente em $\{x \in I : x < p\}$ e estritamente crescente em $\{x \in I : x > p\}$. Como $g(p) = 0$, obtemos que $g(x) > 0$ para todo $x \in I$ com $x \neq p$.
b) este ítem é análogo (fica como exercício).

Roteiro para esboçar o gráfico de uma função f

1. Explicitar o **domínio**;
2. Determinar os **intervalos de crescimento e decrescimento**;
3. Estudar a **concavidade** e destacar os **pontos de inflexão**;
4. Calcular os limites laterais de f em p, nos casos;
   (i) $p \notin D_f$, mas p é um extremos de um dos intervalos que compõe D_f.
   (ii) $p \in D_f$, mas f não é contínua em p.
5. Calcular os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$;
6. Determinar ou localizar as raízes de f.

Exemplo 4

Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

1) $D_f = \mathbb{R}$;

2) Intervalos de crescimento e decrescimento: $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 2x - 1}$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(-\frac{1}{3}, 1)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(1, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

f tem um **máximo local** em $x = -\frac{1}{3}$ pois $f(-\frac{1}{3})$ é o maior valor de f para pontos próximos de $-\frac{1}{3}$. Observe que função cresce antes de $x = -\frac{1}{3}$ e decresce depois de $x = -\frac{1}{3}$.

f tem um **mínimo local** em $x = 1$ pois $f(1)$ é o menor valor de f para pontos próximos de 1. Observe que função decresce antes de $x = 1$ e cresce depois de $x = 1$.

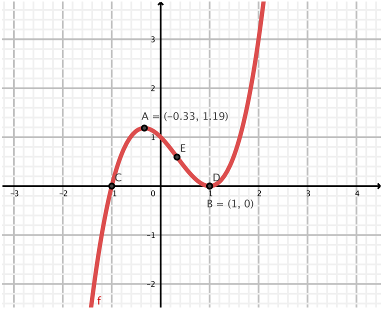
3) Concavidade e pontos de inflexão: $\boxed{f''(x) = 6x - 2}$

$f''(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Intervalos	Sinal de $f''(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, \frac{1}{3})$	$-$	Concavidade para baixo
$(\frac{1}{3}, +\infty)$	$+$	Concavidade para cima

Como ocorreu mudança de concavidade em $x = \frac{1}{3}$, este é um **ponto de inflexão**.

4) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, vamos calcular os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ para ter mais pistas sobre $f(x)$.
$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - x^2 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 + x + 2) = -\infty$



5) As raízes de f são $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

Exemplo 5

Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$.

1) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

2) Intervalos de crescimento e decrescimento:

$f'(x) = \dfrac{(4x^3)(x^2) - (x^4+1)(2x)}{x^4} = \dfrac{2x^5 - 2x}{x^4} = \dfrac{2x(x^4-1)}{x^4} = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3} =$

ou $x = 1$. Como $\frac{2(x^2+1)}{x^2} > 0$, o sinal de $f'(x)$ será dado por $\frac{(x^2-1)}{x}$.

Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ nos seguintes intervalos:

Intervalos	Sinal de $f'(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, -1)$	$-$	f é decrescente
$(-1, 0)$	$+$	$f(x)$ é crescente
$(0, 1)$	$-$	$f(x)$ é decrescente
$(1, +\infty)$	$+$	$f(x)$ é crescente

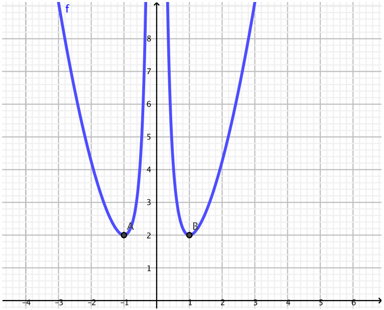
f tem um **mínimo local** em $x = -1$ pois a função decresce antes de $x = -1$ e cresce depois de $x = -1$. f tem um **mínimo local** em $x = 1$ pois $f(1)$ pois a função decresce antes de $x = 1$ e cresce depois de $x = 1$.

3) Concavidade e pontos de inflexão: $\boxed{f''(x) = 2 + 6x^{-4}}$ Como $f''(x)$ não se anula e a expressão é sempre positiva temos:

Intervalos	Sinal de $f''(x)$	Conclusão sobre f
$(-\infty, 0)$	$+$	Concavidade para cima
$(0, +\infty)$	$+$	Concavidade para cima

Como não ocorreu mudança de concavidade, não há **ponto de inflexão**.

4) Limites laterais de f em 0.
$\lim_{x\to 0^+}(x^2 + \frac{1}{x^2}) = +\infty = \lim_{x\to 0^-}(x^2 + \frac{1}{x^2})$
5) $\lim_{x\to +\infty}(x^2 + \frac{1}{x^2}) = +\infty = \lim_{x\to -\infty}(x^2 + \frac{1}{x^2})$



6) f não possui raízes.