A projeção do Banco Mundial é que no ano 2000 a população brasileira deverá ser de 181 milhões, contra os 127 milhões em 1982 e, apesar da forte redução da taxa de natalidade, continuará crescendo ao longo dos anos, chegando ao ano 2050 com 279 milhões de habitantes. A estabilidade da população brasileira deve ser em torno de 304 milhões (Relatório do BIRD). Use estas afirmações para melhorar seu modelo matemático ou use seu modelo para refutar tais afirmações!

PROJETO 5 DIFUSÃO DE RUMORES, IDÉIAS, NOTÍCIAS, DOENÇAS ETC.

"Una notizia un pò originale non ha bisogno di alcun giornale – come una freccia dell'arco scocca, vola veloce di bocca in bocca".

F. de André
Bocca di Rosa

O processo de difusão de rumores está associado ao encontro entre indivíduos de uma população. Mas nem todos estes encontros resultam em uma transmissão do rumor, pois, para isto, é necessário que o encontro seja entre uma pessoa depositária da informação e outra não ciente e que, ainda neste caso, haja comunicação entre as duas pessoas.

Este processo não é simples e tem sido estudado por sociólogos e epidemiólogos. O problema de difusão de nêutrons que guarda uma certa semelhança de idéias com este problema será visto no Modelo 12 (ver Secção 2.7.3).

Partindo de uma hipótese bastante simplificadora, suponha que 20% dos possíveis encontros entre a população ciente e a não ciente sejam efetivamente bem-sucedidos na transmissão de um rumor (boato).

1. Obtenha o tempo necessário para que 90% da população tome conhecimento do fato, se apenas 1 pessoa inicia o rumor em uma população de 3.000 pessoas.
2. Calcule ainda o instante em que o rumor é espalhado com maior velocidade e verifique quantas pessoas tomaram conhecimento dele neste instante.
3. Exercite a sua curiosidade e imaginação neste problema, tanto nas hipóteses quanto nas perguntas, consultando pessoas interessadas.

2.4 EQUAÇÃO COM SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Considere uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\, g(x), \tag{1}$$

onde f e g são funções contínuas em algum intervalo de $\mathbb{R}$.

Dizemos que esta equação é "separável" ou "tem variáveis separáveis".

Utilizando o formalismo de Leibnitz separamos as variáveis

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx$$

e integramos

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^{x} g(z)\, dz, \text{ obtendo } F(y) = G(x)$$

Se pudermos inverter a função F, a solução formal será $y = F^{-1}(G(x))$.

EXEMPLO 1

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3(1+y)$$

temos $f(y) = 1 + y$ e $g(x) = 4x^3$, logo

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{1+s} = \int_{x_0}^{x} 4z^3 dz$$

ou

$$\ln|1+y| = x^4 + C' \quad (C' \text{ constante})$$

Para $y > -1$,

$$\ln(1+y) = x^4 + C'$$

e, invertendo,

$$F(y) = \ln(1+y) = G(x)$$

Portanto, temos

$$y = C\, e^{x^4} - 1 \quad (C = e^{C'})$$

Obtenha solução para $y < -1$.

Para justificarmos o procedimento formal do Exemplo 1 necessitamos inverter a função $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{f(s)} = F(y)$ e, como sabemos, isto pode ser feito se $\dfrac{dF}{dy} \neq 0$ em um intervalo. Como $\dfrac{dF}{dy} = \dfrac{1}{f(y)}$, basta que consideremos o intervalo onde $f(y) \neq 0$, para que $\dfrac{dF}{dy}$ seja bem definida.

Pela escolha adequada das constantes de integração, $G(x)$ pode ser considerada no campo de valores de $F(y)$ e, assim, podemos fazer a composição $F^{-1}[G(x)] = y(x)$, de onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF^{-1}}{dG}\,\frac{dG}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dF}{dy}}\,\frac{dG}{dx} = f(y)\,g(x)$$

Se (x_0, y_0) está no campo de definição da equação diferencial e y_0 está em um intervalo (c, d), onde $f(y) \neq 0$, então fica claro que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(y)\,g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução e é única.

Se agora $f(y_0) = 0$, então é óbvio que $y(x) = y_0$ é solução do problema. Para que haja unicidade, pelo Teorema de Existência e Unicidade (ver Secção 2.2), é necessário que $\dfrac{df}{dy}$ exista e seja contínua em uma vizinhança de y_0. ■

EXERCÍCIO

1. Obtenha as soluções para a equação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(y^2-1)}{xy}$$

Modelo 8 CRESCIMENTO ESPECÍFICO OU LEI DA ALOMETRIA

Nem todas as partes do corpo de um indivíduo têm em cada instante um desenvolvimento proporcional. A cabeça de uma criança cresce mais lentamente que seu corpo. O rápido crescimento dos pés de um adolescente, comparado com o resto de seu corpo, causa muitas vezes alguns transtornos. A *Alometria* estuda estes diferentes padrões de crescimento.

O *tamanho* de um órgão pode ser a medida do seu volume, peso, comprimento ou área lateral.

Sejam $x=x(t)$ e $y=y(t)$ os tamanhos de órgãos ou partes do corpo distintos de um mesmo indivíduo, num instante t.

Dizer que uma parte cresce mais rapidamente que a outra é o mesmo que colocar

$$\frac{dx}{dt}>\frac{dy}{dt}$$

Uma maneira melhor para se poder relacionar diferentes crescimentos é através do crescimento específico ou relativo de cada órgão, definido por $\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}$. Assim, se o crescimento absoluto for exponencial, seu crescimento específico será constante (verifique!).

A Lei da Alometria estabelece que, no mesmo indivíduo, "os crescimentos específicos de seus órgãos são proporcionais". O modelo matemático é, pois,

$$\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt}=k\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

com $x>0$ e $y>0$ e k constante (taxa de crescimento relativo).

Nesta equação x e y são variáveis equivalentes. Usando a Regra da Cadeia podemos escrever

$$\frac{dx}{dy}=k\,\frac{x}{y}\ \text{(de maneira análoga vale } \frac{dy}{dx}=k'\frac{y}{x}\text{)} \tag{2}$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\ln x=k\ln y+\ln c,\ c>0 \tag{3}$$

ou

$$x=cy^k\ (x>0 \quad \text{e} \quad y>0) \tag{4}$$

Na prática é comum usar a Equação (3); tomamos

$$X = \ln x \text{ e } Y = \ln y, \text{ e então, } X = kY + c$$

e, assim, num gráfico log-log os tamanhos se correlacionam na equação de uma reta!

O mesmo mecanismo da Lei da Alometria, isto é, a proporcionalidade entre crescimentos específicos, é usado no estudo do metabolismo, das diferenças raciais etc. Um exemplo de aplicação da Equação (4) foi dado por Bertalanffy (1973) relacionando o peso $W(t)$ e o comprimento $\ell(t)$ de peixes

$$W(t) = W_\infty \left(\frac{\ell(t)}{\ell_\infty}\right)^3$$

2.5 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Uma função $h(x, y)$ é dita homogênea de grau n se

$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n h(x, y)$$

se $h(x, y)$ é homogênea de grau zero, então

$$h(x, y) = h\left(1, \frac{y}{x}\right) = H\left(\frac{y}{x}\right)$$

Em analogia a esta definição, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = h(x, y)$$

é dita homogênea de grau n quando $h(x, y)$ for homogênea de grau n. As equações homogêneas mais freqüentes em modelos matemáticos são as de grau zero e, por isto mesmo, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = H\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

é simplesmente dita homogênea. Para solucionarmos equações deste tipo utilizamos o procedimento descrito a seguir.

Como o 2.º membro depende apenas da expressão $\frac{y}{x}$, o caminho natural é fazer a mudança de variável $z = \frac{y}{x}$ ou $y = zx$ e, portanto, $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Substituindo esta expressão em (1), temos $x\frac{dz}{dx} + z = H(z)$, ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{H(z) - z}{x} \tag{2}$$

que é resolvida separando-se as variáveis.