TRANSFORMADA DE LAPLACE- PARTE I

Ettore A. de Barros

1. INTRODUÇÃO

Podemos definir a Transformada de Laplace como uma operação matemática que converte uma função de variável real em uma função de variável complexa:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1)$$

Onde,

- $s = \sigma + i\omega$
- *f(t) é uma função real da variável t (interpretada como tempo no estudo de sistemas dinâmicos), tal que f(t) = 0 para t < 0.*
- ***F(s)*** é a transformada de Laplace de *f(t)*

Veremos que a transformada é uma importante ferramenta para facilitar a solução de equações diferenciais e para a representação e análise de sistemas dinâmicos.

Adotaremos a letra £ para indicar o operador de Laplace:

$$£[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (2)$$

A transformada inversa é indicada por:

$$£^{-1}[F(s)] = f(t) \qquad (3)$$

A expressão matemática que permite calcular a transformada inversa será apresentada posteriormente.

Conforme veremos adiante, através da transformada de Laplace, pode-se converter uma equação diferencial em uma equação algébrica em termos de uma função complexa. A função que é solução da equação algébrica é a transformada de Laplace da solução da equação diferencial original. Componentes, transitória e de regime permanente, da solução da equação diferencial podem ser obtidas simultaneamente.

Algumas propriedades da solução da equação diferencial (e, por conseguinte, do sistema dinâmico associado) podem ser investigadas graficamente, sem que seja necessário chegar explicitamente à função.

2. CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

A transformada existe se a integral converge. A integral converge se *f(t)* for contínua por partes em cada intervalo finito correspondente, para t > 0, e se *f(t)* for de <u>ordem exponencial</u> conforme *t* tende a infinito. Uma função *f(t)* é dita de ordem exponencial, caso exista uma constante real σ, maior que zero, tal que

$$e^{-\sigma t}|f(t)| \to 0 \text{ para } t \to \infty \qquad (4)$$

3. CÁLCULO DA TRANSFORMADA PARA FUNÇÕES NOTÁVEIS

1) Função Exponencial

Seja $f(t) = Ae^{-\alpha t}$. Calculemos $\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}\left|Ae^{-\alpha t}\right|$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}\left|Ae^{-\alpha t}\right| = \lim_{t\to\infty}|A|e^{-(\sigma+\alpha)t} \qquad (5)$$

Tal limite é zero para $\sigma + \alpha > 0$, ou seja, $\sigma > -\alpha$. Portanto, *f(t)* é de ordem exponencial.

O parâmetro $-\alpha = \sigma_C$ é dito “abcissa de convergência”.

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}|f(t)| = 0 \text{ para } \sigma > \sigma_C \\ &\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}|f(t)| = \infty \text{ para } \sigma < \sigma_C \end{aligned} \qquad (6)$$

Calculemos

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

, onde: $$\begin{aligned} &f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \\ &f(t) = Ae^{-\alpha t} \quad \text{para } t \ge 0 \end{aligned}$$

Para $\sigma > \sigma_C$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}Ae^{-\alpha t}dt = \int_0^\infty Ae^{-(s+\alpha)t}dt = \frac{A}{s+\alpha}$$

Portanto,

$$£[Ae^{-\alpha t}] = \frac{A}{s+\alpha} \qquad (7)$$

2) Função Degrau Unitário

Seja f(t) = 1 para $t \ge 0$ e 0 para t < 0. Essa é conhecida como função degrau unitário ou “função de Heaviside”. Indicaremos a mesma por “1(t)”. A sua transformada de Laplace é calculada como segue (note que $\sigma_C = 0$, ou seja, a integral converge para $\sigma > 0$).

$$F(s) = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt = \lim_{t\to\infty} \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^t = \frac{1}{s}$$

Portanto,

$$\pounds[1(t)] = \frac{1}{s} \tag{8}$$

3) Função Rampa

Seja f(t) = t para $t \geq 0$ e 0 para t < 0. Essa é conhecida como função rampa. A sua transformada de Laplace é calculada como segue (note que $\sigma_C = 0$, ou seja, a integral converge para $\sigma > 0$).

$$F(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = -\frac{1}{s}[\int_0^\infty tde^{-st}] = -\frac{1}{s}[te^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st}dt] = -\frac{1}{s}[\frac{e^{-st}}{s}]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Portanto,

$$\pounds[t] = \frac{1}{s^2} \tag{9}$$

4) Função Seno

Seja f(t) = senΩt para $t \geq 0$ e 0 para t < 0. A sua transformada de Laplace é calculada como segue. Usando a definição da função exponencial complexa, pode-se expressar f(t) como:

$$sen\Omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right)$$

Aplicando este resultado no cálculo da transformada, vem:

$$F(s) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right)e^{-st}dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{(i\Omega - s)t} - e^{-(i\Omega + s)t}\right)dt = \frac{1}{2i}[\frac{e^{(i\Omega - s)t}}{i\Omega - s}\Bigg|_0^\infty + \frac{e^{-(i\Omega + s)t}}{i\Omega + s}\Bigg|_0^\infty] =$$

$$= \frac{1}{2i}[\frac{1}{s - i\Omega} - \frac{1}{s + i\Omega}] = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

Portanto,

$$\pounds[sen(\Omega t)] = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \tag{10}$$

Note que $\sigma_C = 0$, ou seja, a integral converge para $\sigma > 0$.

5) Função Cosseno

Seja f(t) = cosΩt para $t \geq 0$ e 0 para t < 0. A sua transformada de Laplace é obtida por procedimento análogo ao da função seno:

$$\pounds[\cos\Omega t] = \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \tag{11}$$

Note que $\sigma_C = 0$, ou seja, a integral converge para $\sigma > 0$.

6) Função Periódica Genérica

$$£[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau = t - nT$, e observando a igualdade $f(\tau) = f(\tau + nT)$ (por *f* ser periódica de período "*T*"), temos:

$$£[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \int_0^{T} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Além disso, resolvemos a somatória como a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots\ldots = 1 + e^{-Ts}(1 + e^{-Ts} + \ldots) = 1 + e^{-Ts} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs}$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Aplicando este resultado no cálculo da transformada acima vem:

$$£[f(t)] = \frac{\int_0^{T} f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-Ts}}$$

4. ALGUMAS PROPRIEDADES

a. Multiplicação da Função por Constante:

$$£[Af(t)] = A£[f(t)] \qquad (12)$$

b. Soma de funções:

$$£[f_1(t) + f_2(\mathrm{t})] = £[f_1(t)] + £[f_2(\mathrm{t})] \qquad (13)$$

c. Transformada da derivada de uma função

Para *f(t)* e sua derivada continuas, e *f(t)* de ordem exponencial, temos:

$$£[\frac{df(t)}{dt}] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^{P} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{P\to\infty}\left\{ e^{-st} f(t)\Big|_0^P - \int_0^P f(t)de^{-st} \right\} =$$

$$\lim_{P\to\infty}\left\{ e^{-sP} f(P) - f(0) + s\int_0^P f(t)e^{-st}dt \right\} = sF(s) - f(0)$$

O limite do produto $e^{-sP} f(P)$ é zero, pois se admite que *f(t)* é de ordem exponencial. Portanto,

$$£[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0) \tag{14}$$

O mesmo resultado também vale para a derivada de *f(t)* sendo seccionalmente contínua.

Demonstra-se também, analogamente, os resultados abaixo:

$$£[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0} \tag{15}$$

$$£[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^nF(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}\Big|_{t=0} - \ldots\ldots - s\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}\Big|_{t=0} - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0} \tag{16}$$

d. Multiplicação por $e^{-\alpha t}$:

$$£[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s+\alpha) \tag{17}$$

e. Mudança na escala:

$$£[f(\frac{t}{\alpha})] = \alpha F(\alpha s) \tag{18}$$

f. Translação de uma Função:

$$£[f(t-\alpha).1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \qquad \alpha \geq 0 \tag{19}$$

g. Diferenciação Complexa:

$$£[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$£[t^2 f(t)] = \frac{d^2F(s)}{ds^2} \tag{20}$$

$$£[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

h. Integral de Convolução:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau = \int f_2(t-\tau) f_1(\tau)d\tau$$

$$£[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \tag{21}$$

i. **Integral**

Seja $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$. Logo,

$$g'(t)=f(t)$$

e *g(0)=0*.

Assim, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados e aproveitando o resultado para a derivada, tem-se:

$$£[g'(t)]=F(s)=\int_0^\infty g'(t)e^{-st}dt=s£[g(t)]-g(0)=s£[g(t)]$$

Portanto,

$$s£[g(t)]=s£[\int_0^t f(\tau)d\tau]=F(s)$$

Logo,

$$£[\int_0^t \mathrm{f(t)dt}]=\frac{F(s)}{s} \qquad (22)$$

Para uma integral indefinida, tem-se:

$$£[\int f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}+\frac{\left.\int f(t)dt\right|_{t=0}}{s} \qquad (23)$$

5. **Funções Pulso e Impulso**

A função impulso é de grande importância em várias deduções de propriedades da transformada de Laplace. Também comparece em aplicações importantes da teoria de sinais e sistemas dinâmicos. Para a sua apresentação, passaremos primeiro à dedução da transformada de Laplace da função pulso.

5.1 Função Pulso Retangular

Seja *f(t)* dada por:

$$f(t)=\begin{cases} A/t_0, & 0<\mathrm{t}<t_0 \\ 0, & \mathrm{t}<0,\ \mathrm{t}>t_0 \end{cases}$$, onde *A* e t_0 são constantes positivas.

O cálculo de sua transformada de Laplace pode ser facilmente obtido a partir da função degrau unitário e da aplicação da propriedade de transformada de Laplace de uma função com translação no tempo:

$$f(t) = \frac{A}{t_0}[1(t) - 1(t - t_0)]$$

$$£[f(t)] = \frac{A}{t_0}\left[\frac{1}{s} - \int_{t_0}^{\infty} e^{-st}dt\right] = \frac{A}{t_0}\left[\frac{1}{s} - \left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)_{t_0}^{\infty}\right] = \frac{A}{t_0}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s}\right]$$

$$£[f(t)] = \frac{A}{t_0}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-st_0}}{s}\right]$$

5.2 *"Função" Impulso*

Considere a largura t_0 da função pulso. Vamos tentar diminuí-la e considerar o que acontece com a função no limite quando essa largura tende a zero. É fácil perceber que, conforme t_0 vai diminuindo, A/t_0 aumenta, embora a área sob o pulso permaneça constante e igual a *"A"*.

Antes de prosseguirmos com *f(t)* , calculemos a transformada de Laplace da função pulso com t_0 tendendo a zero:

$$\lim_{t_0 \to 0} £[f(t)] = \lim_{t_0 \to 0}\left[\frac{A(1 - e^{-st_0})}{st_0}\right]$$

Podemos aplicar a regra de L´Hospital e achar a resposta para este limite:

$$\lim_{t_0 \to 0}\left[\frac{A(1 - e^{-st_0})}{st_0}\right] = \lim_{t_0 \to 0}\left[\frac{A(se^{-st_0})}{s}\right] = A$$

No caso de *A* igual a 1, este é o resultado da transformada de Laplace da função *impulso* ou *delta de Dirac*.

A "função" pode ser interpretada como o caso limite da função pulso, no qual $\lim_{t_0 \to 0} f(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0} = \infty$

Ou seja, a função tende a infinito em $t = 0$, sendo nula para outros valores de *t*.

A *função impulso* ou *delta de Dirac*, $\delta(t)$, pode ser definida a partir de uma função contínua *g(t)*:

$$\int_0^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0)$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_a)g(t)dt = g(t_a)$$

Em particular, para ***g(t) = 1,***

$$\int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1$$