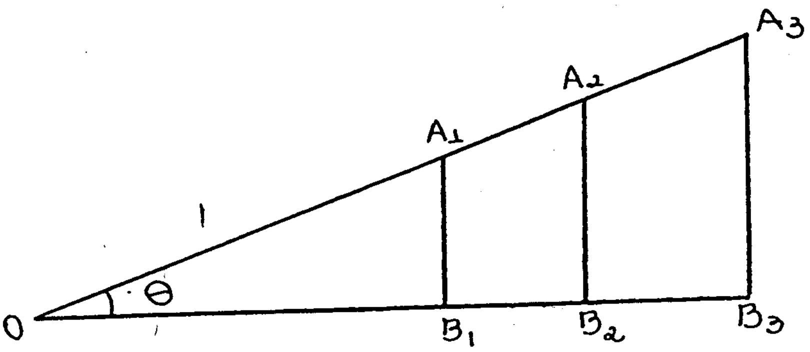
MAT 1513 - Laboratório de Matemática

Funções Trigonométricas

As Funções trigonométricas no triângulo retângulo

Analisando a figura a seguir, temos que os triângulos retângulos ΔOA_1B_1, ΔOA_2B_2 e ΔOA_3B_3, são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes.



Segue-se desta semelhança, as seguintes relações:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} \qquad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} \qquad \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$$

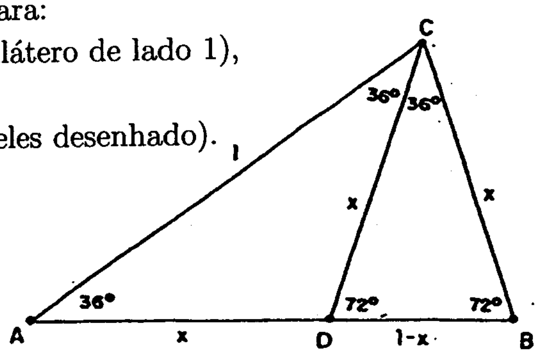
Observe que estas relações dependem apenas do ângulo θ, medido em graus, e não dos comprimentos envolvidos, onde θ é o ângulo $\widehat{A_iOB_i}$. Podemos então, definir três funções que tem como domínio o intervalo $]0, 90[$, isto é, consideremos as seguintes funções

$$sen\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} \qquad \cos\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \qquad tg\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

que se chamam, respectivamente, seno de θ, cosseno de θ e tangente de θ. Observe que a imagem das funções seno e cosseno é $]0, 1[$ e da função tangente é $]0, \infty[$, note ainda, que estas funções, chamadas de funções trigonométricas, estão relacionadas entre si.

Exercício 1: Demonstre que para $\theta \in]0, 90[$ valem as seguintes relações:
(a) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, (b) $tg\theta = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$,
(c) $sen(90° - \theta) = \cos\theta$, (d) $tg(90° - \theta) = \frac{1}{tg\theta}$.

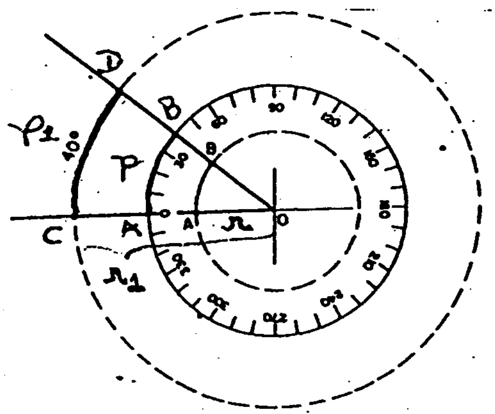
Exercício 2: Calcule o valor de $\cos\theta$, $sen\theta$ e $tg\theta$, para:
(a) $\theta = 30°$ e $\theta = 60°$ (Dica: tome um triângulo equilátero de lado 1),
(b) $\theta = 45°$,
(c) $\theta = 36°$ e $\theta = 18°$ (Dica: utilize o triângulo isósceles desenhado).



Observe que o domínio das funções definidas acima é $]0, 90[$, no entanto, não nos interessa esta limitação do domínio nem tampouco o uso da unidade grau para a medida dos ângulos, pois queremos definir funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de todos os números reais. Para isso, precisamos abandonar o triângulo retângulo e procurar um outro modelo geométrico que nos permita estabelecer relações análogas aquelas válidas no triângulo retângulo. O modelo geométrico é a circunferência orientada de raio unitário.

Medidas de ângulos e de arcos. Radianos

Dada uma circunferência, estamos acostumados a usar expressões do tipo, *arco de* $40°$, para nos referir ao arco que subentende um ângulo central de $40°$. Assim podemos nos referir aos arcos AB e CD como arcos de $40°$.



Note que, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo. Para cada uma delas, o ângulo dado subentende um arco diferente, cujo comprimento depende do raio da circunferência ao qual ele pertence. Assim, na figura, o comprimento de AB é menor que o comprimento de CD sendo ambos chamados de arcos de $40°$.

Numa dada circunferência, a arcos mais compridos correspondem ângulos centrais (aberturas) maiores. Se você dobra a abertura do ângulo central, dobrará o comprimento do arco subentendido e vice-versa. Daí vem a possibilidade de usar o comprimento de arcos de uma circunferência fixada como medida dos ângulos com vértice no seu centro, para medir a abertura ou o giro correspondente a esses ângulos. Por exemplo, um arco de $40°$ equivale a $1/9$ de uma circunferência, enquanto um de $60°$ equivale a $1/6$ da mesma.

Por outro lado, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo.

Para cada uma dessas circunferências, o ângulo dado subentende um arco diferente. No entanto, existe uma relação de semelhança entre os arcos da circunferência que correspondem ao mesmo ângulo central, a saber:

$$\frac{\text{comprimento do arco} AB}{R_1} = \frac{\text{comprimento do arco} CD}{R_2}.$$

Em particular, se C_1 e C_2 são os comprimentos das circunferências de raios R_1 e R_2, respectivamente, temos que:

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}\,.$$

Definiremos: $\pi = \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ ou ainda, $\pi =$ comprimento de um semi-círculo de raio 1.

Utilizando-se métodos de aproximação do comprimento de circunferências, obtemos aproximações para o valor de π, por exemplo, $\pi \approx 3,1415926$.

Assim, o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$ e os arcos correspondem a porções da circunferência.

Definição: A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o **raio da circunferência**.

Por conveniência, fixaremos no que se segue, uma circunferência de raio 1, pois, neste caso, o ângulo correspondente a uma volta inteira medirá 2π, o de $\frac{1}{4}$ de volta $\frac{\pi}{2}$ e o de $\frac{1}{9}$ de volta $\frac{2\pi}{9}$.

OBS.: não importa a unidade de medida de comprimento para o raio, pois por exemplo, se o raio do circunferência é igual a 1 km, o arco correspondente ao ângulo de $\pi/4$ radianos mede $\pi/4$ quilômetros; se o raio do circunferência mede 1 polegada, o arco correspondente ao ângulo de $\pi/4$ radianos mede $\pi/4$ polegadas.

Exercícios:

(3) Mostre que 1 *radiano* $\approx 57°17'44''$, onde $1' = \frac{1}{60}1°$ e $1'' = \frac{1}{60}1'$.

(4) Exprimir em radianos:

(a) 45° (b) 225° (c) 210° (d) 270° (e) 240° (f) 22°30′

(g) 60° (h) 315° (i) 300° (j) 345° (k) 330° (l) 31°15′45″

(5) Exprimir em graus :

(a) $\frac{\pi}{6}\,rad$ (b) $\frac{\pi}{4}\,rad$ (c) $\frac{2\pi}{3}\,rad$ (d) $\frac{5\pi}{6}\,rad$

(e) $\frac{3\pi}{8}\,rad$ (f) $\frac{11\pi}{6}\,rad$ (g) $\frac{\pi}{3}\,rad$ (h) $\frac{3\pi}{4}\,rad$

(6) Um arco de circunferência mede $30cm$ e o raio da circunferência mede $10cm$. Calcular a medida do ângulo central correspondente.

(7) Sobre uma circunferência de raio $10cm$ marcam-se os pontos A e B de modo que a corda AB mede $10cm$. Calcular a medida do arco menor AB.

(8) Um decágono regular é inscrito em uma circunferência de raio $1m$. Calcular o comprimento do arco determinado por dois vértices consecutivos.

(9) Exprimir em radianos os ângulos α e β tais que $\alpha - \beta = 15°$ e $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$.

(10) Calcular em graus a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$ definido numa circunferência de raio $10cm$, com AB medindo $3cm$.

(11) Calcular a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$ que determina em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento $\frac{2\pi r}{3}$.

MAT1513 - Laboratório de Matemática
Trigonometria

Funções Trigonométricas

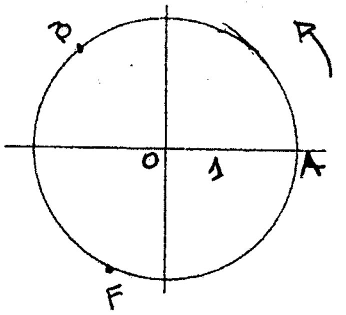
A CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Para prosseguir vamos considerar uma circunferência de raio 1 e tendo em mente o que foi discutido até aqui vamos identificar os ângulos e arcos correspondentes. Assim, para simplificar a nossa comunicação, vamos nos referir sem distinção ao ângulo π e ao arco π.

Vamos associar a cada número real um ponto sobre uma circunferência de raio 1, para depois disso podermos definir as funções trigonométricas de qualquer número real. Isto será feito da seguinte forma:

Sobre uma circunferência C de raio 1 vamos fixar um ponto A que será a origem dos arcos e a partir deste ponto vamos escolher o sentido anti-horário de percurso sobre a circunferência como sendo positivo para a representação dos arcos. Isto é, definimos a medida algébrica de um arco AB no sentido anti-horário desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário, e negativo se o sentido do percurso de A para B for horário.

No caso do desenho abaixo, a medida algébrica do arco AB (no sentido anti-horário) é um número positivo igual ao comprimento do arco AB ou a medida em radiano do ângulo central correspondente. Já no caso de arco AF (no sentido horário) sua medida algébrica é um número negativo igual a menos o comprimento do arco AF.



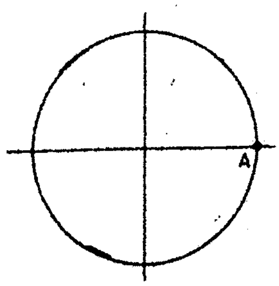
COMPRIMENTO DO SEGMENTO $\overline{OA} = 1$

Exercício 1. Represente na circunferência abaixo os pontos correspondentes aos arcos de medidas:

medida de $AB = \dfrac{\pi}{8}$ medida de $AC = \dfrac{3\pi}{4}$

medida de $AD = -3$ medida de $AE = 0$

medida de $AF = 2\pi$



Com o que fizemos até agora para cada número x do intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ corresponde um ponto P_x sobre a circunferência de tal forma que o arco AP_x tenha medida $|x|$ e o percurso de A para P_x seja anti-horário ou horário dependendo do sinal de x.

Como estender esta correspondência para números além deste intervalo?

Vamos definir uma função que a cada número real faz corresponder um ponto P_x na circunferência assim: se x é positivo percorremos sobre a circunferência no sentido anti-horário um comprimento igual a x até determinar P_x, se x é negativo este percurso é feito no sentido horário.

Então se $x < -2\pi$ ou $x > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta na circunferência para atingir P_x num ou noutro sentido. Por outro lado, um dado ponto P da circunferência corresponderá a uma infinidade de números reais, como veremos.

Exercícios

2. Quantas voltas serão dadas na circunferência para se representar os números $\frac{25\pi}{3}$ e -12?

3. Se um ponto K da circunferência corresponde ao número $\frac{\pi}{7}$ a que outros números este mesmo ponto corresponde?

4. Se um ponto P da circunferência corresponde a um número x, qual é a forma dos outros números que também correspondem a este mesmo ponto? Estes números são chamados as várias determinações do arco AP.

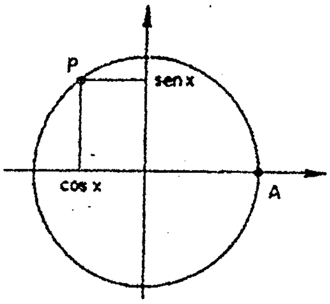
AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência C de raio 1 e tome $A = (1, 0)$ a origem dos arcos sobre C. Para cada número real x, seja P_x o ponto na circunferência C onde a medida do arco AP_x é x. Definimos

$\cos x =$ abscissa de P_x

$\operatorname{sen} x =$ ordenada de P_x

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se $\cos x \neq 0$



Observe que para $P_0 = A$ é possível definir $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, e para $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ temos $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$.

5. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para $x = \pi, x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$.

Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valores de x e os valores de $\operatorname{sen} x, \cos x$ e tgx todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões pois ao estudarmos funções da forma $F(x) = x +\ sen x$, se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto $(x, F(x))$ do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

Exercícios

6. Verifique que, para todo número real x, temos: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

7. Quais são os valores máximos e mínimos para sen$x$ e para cos$x$? O que podemos dizer sobre os valores da função tangente?

8. Para que valores de x não é possível definir tgx?

9. Verifique que para todo número inteiro k e todo número real x temos: $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$. Isto quer dizer que a função cosseno é periódica de período 2π. A mesma igualdade vale para as funções seno e tangente? Por quê?

10. As funções seno e cosseno mudam de sinal dependendo do valor de x, ou seja, dependendo da posição do ponto P_x em cada um dos quadrantes do sistema de coordenadas. Além disso, estas funções são crescentes ou decrescentes em cada um dos quatro quadrantes. Observe estes fatos e complete a tabela a seguir:

	P_x no 1º Quadrante	P_x no 2º Quadrante	P_x no 3º Quadrante	P_x no 4º Quadrante
seno	positiva e crescente			
cosseno		negativa e crescente		

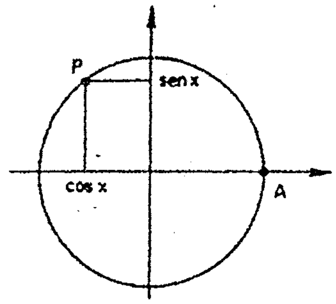
AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência C de raio 1 e tome $A = (1, 0)$ a origem dos arcos sobre C. Para cada número real x, seja P_x o ponto na circunferência C onde a medida do arco AP_x é x. Definimos

$\cos x$ = abscissa de P_x

$\operatorname{sen} x$ = ordenada de P_x

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se $\cos x \neq 0$



Observe que para $P_0 = A$ é possível definir $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$, e para $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$ temos $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

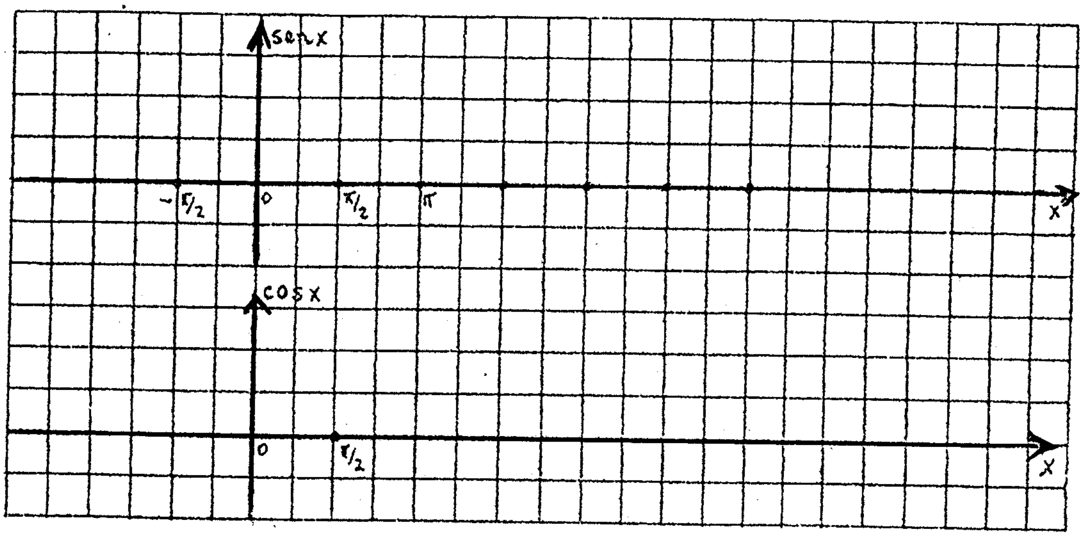
5. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para $x = \pi, x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = 2\pi$.

Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valôres de x e os valores de $\operatorname{sen} x, \cos x$ e tgx todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões pois ao estudarmos funções da forma $F(x) = x + \ senx$, se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto $(x, F(x))$ do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

Exercícios

6. Verifique que, para todo número real x, temos: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

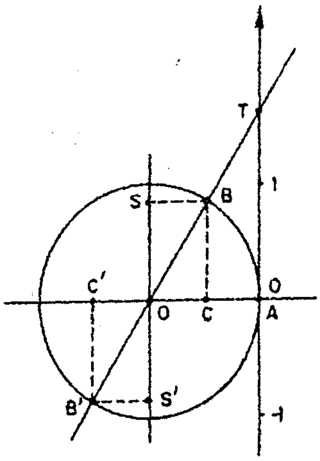
11. Com base nos resultados obtidos até aqui faça um esboço dos gráficos das funções seno e cosseno.



Para analisarmos o comportamento da função tg e construirmos seu gráfico é mais adequada uma outra interpretação de tgx sem depender das funções seno e cosseno, mas apenas do ponto P_x.

Para isso, vamos introduzir um outro eixo de coordenadas tendo como origem o ponto A e a direção da reta tangente à circunferência no ponto A, orientada positivamente como o eixo dos y do sistema original.

Sobre este eixo escolhemos a unidade de medida igual à do raio da circunferência.



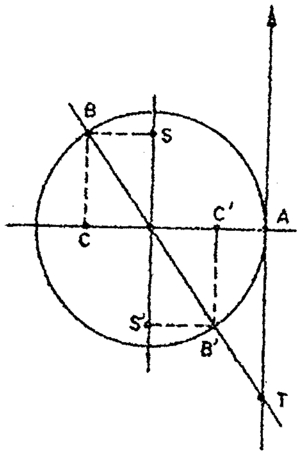
Se AB é um arco de medida x, a reta que passa por 0 e por B encontra a circunferência em B' e o novo eixo em T. Vamos mostrar que tgx = medida de AT, isto é, tgx é a medida algébrica de AT. Para se convencer disso faça os dois próximos exercícios:

12. Se o ponto B está no 1º ou no 3º quadrantes, considere que a medida de $AB = x$ e a medida de $AB' = x + \pi$. Use a semelhança dos triângulos para completar as igualdades, justificando a validade das mesmas.

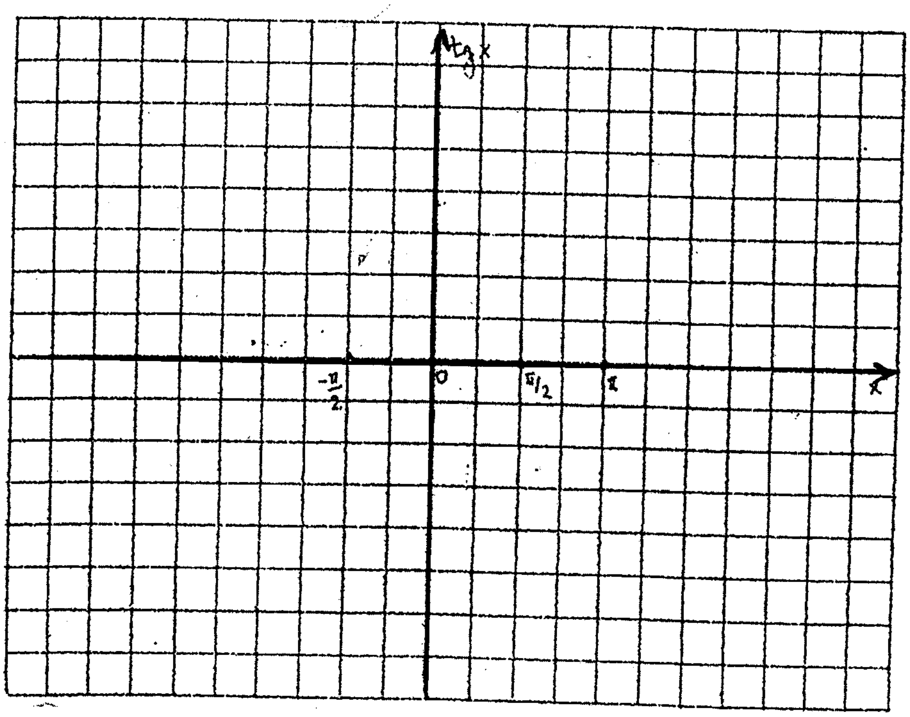
$$\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \underline{\hspace{3cm}} = \text{medida de } AT$$

$$\text{tg}(x+\pi) = \frac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \underline{\hspace{3cm}} = \text{medida de } AT$$

13. Se o ponto B está no 2º ou no 4º quadrantes, repita o mesmo raciocínio para concluir que: tgx = − medida de AT.



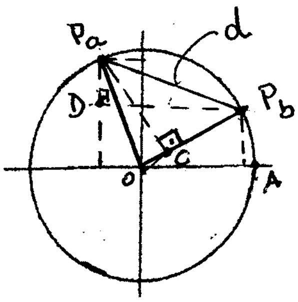
14. Usando esta nova interpretação para tg$x$ e os cálculos feitos, vimos que a função tangente é periódica de período π. Assim, para fazer seu gráfico basta saber seu sinal e o seu crescimento para x nos dois primeiros quadrantes. Faça o gráfico desta função:



15. Considere na circunferência trigonométrica orientada do raio 1 dois pontos P_a e P_b (onde a é o comprimento do arco AP_a e b é o comprimento do arco AP_b). Temos então as seguintes coordenadas cartesianas para os pontos:

$$P_a = (\cos a,\ \text{sen}\, a), \quad P_b = (\cos b,\ \text{sen}\, b) \quad A = (1, 0)$$

$\measuredangle P_b D P_a$ É RETO
$\measuredangle P_b C P_a$ É RETO



i) Explique por que $\cos(a - b)$ = comprimento do segmento OC.

ii) Sendo d a distância entre os dois pontos P_a e P_b, determine o valor de d^2 utilizando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

$\Delta P_a C P_b$ e $\Delta P_a D P_b$.

iii) Igualando as duas expressões obtidas para d^2 em ii), deduza uma fórmula que permita determinar o valor de $\cos(a - b)$ em termos de senos e cossenos de a e b.

Bibliografia básica para este texto: Carmo, M.P., Morgado, A.C., Wagner, E. - Trigonometria , Números Complexos. Coleção do Professor de Matemática - SBM.

MAT1513 - Laboratório de Matemática
Trigonometria

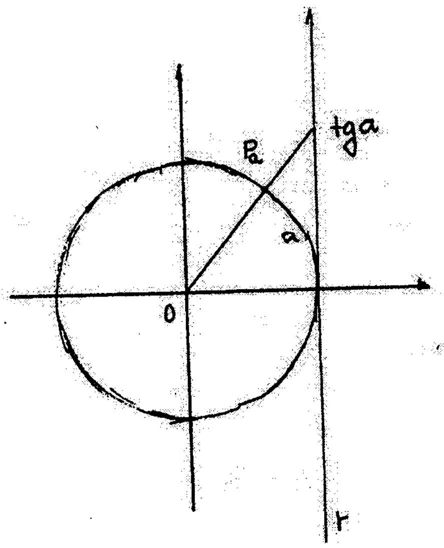
Funções Trigonométricas: tangente, cotangente, secante,

TANGENTE

A tangente de um número a é definida por

$$\mathrm{tga} = \frac{\mathrm{sena}}{\mathrm{cosa}}, \ \mathrm{a} \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi; \ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

A tangente de um número a é interpretada geometricamente na figura



Note que a reta r é formada dos pontos $(1, y)$. Um ponto está na reta OP_a se for da forma $(k\cos a, k\mathrm{sen} a)$

No ponto de intersecção devemos ter

$$(k\cos a, k\mathrm{sen}\, a) = (1, y)$$

Logo, $k = \dfrac{1}{\cos a}$ e $y = \dfrac{\mathrm{sen} a}{\cos a} = \mathrm{tga}$.

Agora:

$$\mathrm{tg(a+b)} = \frac{\mathrm{sen(a+b)}}{\mathrm{cos(a+b)}} = \frac{\mathrm{sen\,a\cos b + sen\,b \cdot \cos a}}{\mathrm{\cos a \cos b - sen\,a sen\,b}}$$

dividindo o numerador e o denominador por $\cos a \cos b$ obtemos

$$\mathrm{tg(a+b)} = \frac{\mathrm{tg\,a + tg\,b}}{\mathrm{1 - tg\,a \cdot tg\,b}}$$

como $\mathrm{tg\,(-a) = -tg\,a}$ (verifique!)

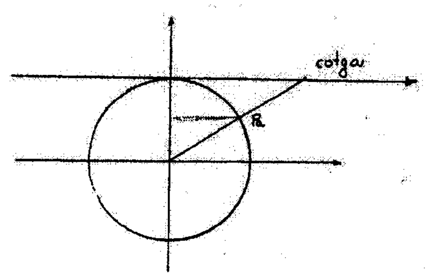
$$\mathrm{tg\,(a-b)} = \frac{\mathrm{tg\,a - tg\,b}}{\mathrm{1 + tg\,a \cdot tg\,b}}$$

COTANGENTE

$$\text{cotg } a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}, \quad a \neq k\pi \, k \in \mathbb{Z}$$

Das definições

$$\text{tg a} = \frac{1}{\text{cotg a}}, \quad \text{com} \quad \text{a} \neq \text{k}\pi \,, \frac{\pi}{2} + \text{k}\pi$$



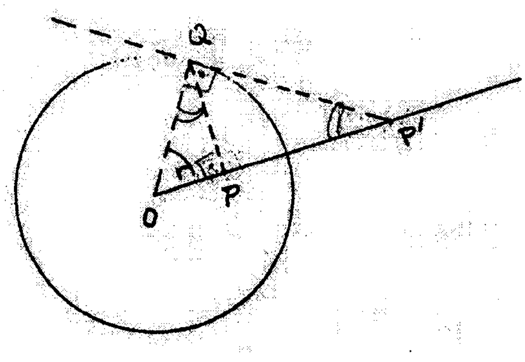
SECANTE E COSSECANTE

Definimos $\sec a = \dfrac{1}{\cos a} \, a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \, k \in \mathbb{Z}$ e cossec $a = \dfrac{1}{\text{sen } a}$, $a \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
Note que

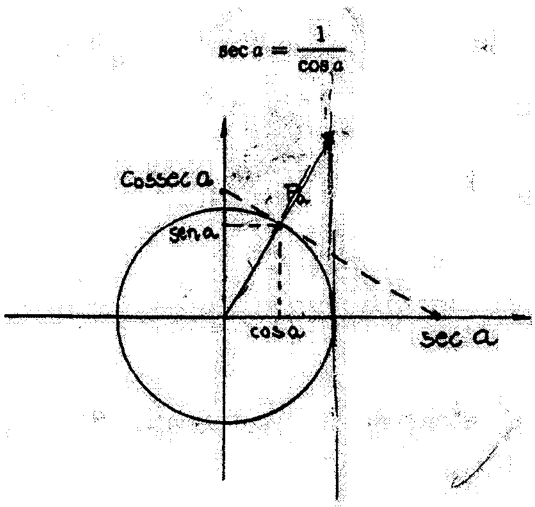
$$1 + \text{cotg}^2 a = \text{cossec}^2 a \quad \text{e} \quad 1 + tg^2 a = \sec^2 a \ .$$

A secante é o inverso do cosseno e a cossecante o inverso do seno.
Como determinar geometricamente o inverso de um segmento?

Problema: Dado um ponto P que está a uma distância r de um ponto fixo 0, determinar um ponto P' na semi-reta $\overrightarrow{OP}$ cuja distância é $\dfrac{1}{r}$ do ponto 0.



Supondo $r \leq 1$, por P, traçamos uma das semi-retas perpendiculares a OP que corta o círculo unitário num único ponto Q. Tracemos a reta tangente ao círculo por Q. Esta intercepta a reta OP num ponto P'. Então, $\overline{OP'} = \dfrac{1}{r}$. De fato, os Δs OPQ e OQP' são semelhantes quando $r < 1$. Observe que quando $r = 1$, $P = Q = Q'$
Voltando à secante e à cossecante:



Observação:
É instrutivo observar que a equação da reta tangente à circunferência, no ponto P_a, é

$$\cos a \cdot x + \operatorname{sen} a \cdot y = 1$$

Esta reta intercepta o eixo $x(y = 0)$ no ponto (x , 0) dado por

$$\cos a \cdot x = 1$$

e o eixo y no ponto $(0, y)$ dado por $\operatorname{sen} a \cdot y = 1$. Obtemos assim $x = \sec a$ e $y = \operatorname{cossec} a$

Exercícios:

1. Determine: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$

2. Deduza fórmulas para $\operatorname{cotg}(a+b)$ e $\operatorname{cotg}(a-b)$.

3. Mostre que:

   a) $\operatorname{tg}^2\frac{\mathrm{a}}{2} = \frac{\sec \mathrm{a} - 1}{\sec \mathrm{a} + 1}$

   b) $\sec(a+b) = \frac{\sec a \sec b}{\operatorname{tg}\mathrm{b} - \operatorname{tg}\mathrm{a}}$

   c) $\operatorname{cossec}(a+b) = \frac{\operatorname{cossec} a \operatorname{cossec} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}$