AJUSTE DE PARÂMETROS

Covid-19

Entrega:24/04/2020

Introdução

Várias situações são modeladas por Equações Diferenciais Ordinárias. Os modelos teóricos são bem estudados, com hipóteses sólidas e validados em laboratório. Porém, quando tentamos aplicá-los em casos concretos várias dificuldades aparecem, entre elas, quais parâmetros usarmos.

Neste trabalho vocês explorarão este aspecto da aplicação de EDO. E nada mais atual que tentarmos ajustar a atual epidemia. Para simplificar, usaremos um modelo epidemiológico muito simples, aplicável ao Covid-19 somente no surto inicial (comportamento exponencial). Neste modelo, agruparemos a população em compartimentos, os indivíduos suscetíveis S (que não tem a doença e podem contraí-la) e os indivíduos infectados I (que estão com a doença e podem transmiti-la). Agruparemos e definiremos como S e I o número de indivíduos nestas classes. Claramente, com a evolução da doença, este número varia, portanto, são funções do tempo. Chamaremos de N a população total, que suporemos constante $S+I=N$.

Definido a divisão da população, agora podemos definir como é a dinâmica ao longo do tempo dela, neste caso, assumiremos um modelo simples: Existem parâmetros α e β que representam as taxas em que um infectado, ao encontrar um suscetível, o infecta e a taxa de recuperação de um infectado, que se torna suscetível de novo.

$$\begin{aligned} S+I &\xrightarrow{\alpha} 2\,I \qquad \textit{dinâmica local} \\ I &\xrightarrow{\beta} S \qquad \textit{duas reações} \end{aligned}$$

Com isto, temos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$S' = -\alpha \frac{SI}{N} + \beta I$$
$$I' = \alpha \frac{SI}{N} - \beta I$$

E, como $S+I=N$, reduzimos a uma equação

$$I' = \alpha \frac{(N-I)I}{N} - \beta I$$

Trabalhando com densidades $j=\frac{I}{N}\ e\ s=\frac{S}{N}$, temos a seguinte equação

$$\frac{dj}{dt}=\alpha(1-j)j-\beta j \tag{1}$$

Observe que temos duas soluções que não dependem do tempo, $j^d=0 \quad e \quad j^S=1-\frac{\beta}{\alpha}$. A primeira é dita "livre de doenças", já que não temos infectados, o segundo é dito equilíbrio endêmico, quando existir. Do ponto de vista da aplicação a densidade tem de ser positiva, logo, o equilíbrio endêmico, apesar de sempre existir matematicamente, só tem relevância na aplicação, quando for positivo, ou seja, quando, $R_0=\frac{\alpha}{\beta}>1$.

Tarefas:

1) Teórica:
   a. Mostre que, se $j(0)\in[0,1]$, então a solução de (1) satisfaz $j(t)\in[0,1]$, para todo tempo.
   b. Verifique que $j^d \quad e \quad j^S$ são souções.
   c. Utilize o método de variáveis separadas para achar a solução geral de (1). (Observe que : $\int\frac{1}{ax-bx^2}dx=\frac{\ln x-\ln(a-bx)}{a}+const$.
   d. Decida o que acontece com a solução (para cada condição inicial) para diferentes valores de $R_0>0$.
2) Numérico.

   Vamos ajustar os dados de casos confirmados de Covid-19 na cidade de São Paulo, desde 25 de fevereiro de 2020 quando havia 1 caso, que será nosso instante 0 e valor inicial, que podem ser acessados em

   https://brasil.io/dataset/covid19/caso?search=&date=&state=SP&city=S%C3%A3o+Paulo&place_type=&is_last=&city_ibge_code=&order_for_place=

   Para cada par de parâmetros α e β temos uma única solução de (1). Queremos a solução que melhor se ajusta aos dados. Se (t_i,j_i) são os dados reais, então a solução que melhor se ajusta aos dados é aquela que $\sum_i(j(t_i)-j_i)^2$ seja mínima.

   a. Utilize um método numérico para calcular, dado um valor do parâmetro, a solução de (1)
   b. Utilize o método numérico para determinar os valores dos parâmetros que melhor se ajustam aos dados.

c. Represente graficamente sua solução.