



SEL 0449 - Processamento Digital de
Imagens Médicas

SEL 5895 – Introdução ao
Processamento Digital de Imagens

Aula 3

Parte 2 - Processamento Espacial

Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira

mvieira@sc.usp.br

Processamento Espacial

Parte 2

- Transformações ponto a ponto
 - Histograma
 - Transformações lineares
 - Transformações não-lineares
- **Transformações por vizinhança**
 - **Convolução**
 - **Filtros lineares**
 - **Máscara de aguçamento**



Transformações Por Vizinhaça

Operadores Locais (Vizinhança).

Combina a Intensidade de um certo número de píxels (janela), para computar o valor da nova intensidade na Imagem de Saída.

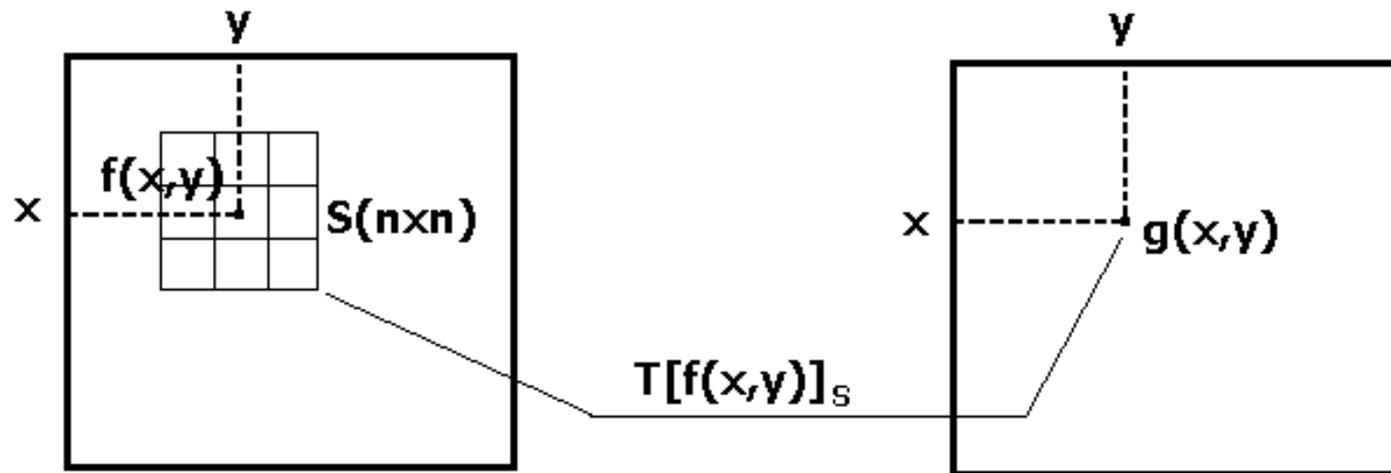


Imagem de Entrada

Imagem de Saída

$T[f(x, y)]_S \implies$ Operação sobre todos os píxels dentro da janela S centrada em $f(x, y)$

Convolução e Correlação Cruzada

Convolução \longrightarrow $f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m)h(x - m) dm$

Correlação Cruzada \longrightarrow $f(x) \star h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m)h(x + m) dm$

Convolução e Correlação Cruzada

Forma DISCRETA

Convolução \longrightarrow $f[x] * h[x] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]h[x - m]$

Correlação Cruzada \longrightarrow $f[x] \star h[x] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]h[x + m]$

1D

Correlação

Convolução

(a) \swarrow Origem f w \swarrow Origem f w rotacionado 180°

0 0 0 1 0 0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 1 0 0 0 0 8 2 3 2 1 (i)

(b) \downarrow

0 0 0 1 0 0 0 0 (j)

1 2 3 2 8 8 2 3 2 1

↑ Posição inicial do alinhamento

(c) \swarrow Preenchimento com zeros \swarrow

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (k)

1 2 3 2 8 8 2 3 2 1

(d) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (l)

1 2 3 2 8 8 2 3 2 1

↑ Posição após um deslocamento

(e) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (m)

1 2 3 2 8 8 2 3 2 1

↑ Posição após quatro deslocamentos

(f) 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 (n)

1 2 3 2 8 8 2 3 2 1

↑ Posição final

(g) Resultado da correlação completa Resultado da convolução completa

0 0 0 8 2 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0 (o)

(h) Resultado da correlação após recorte Resultado da convolução após recorte

0 8 2 3 2 1 0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 (p)

2D

	<i>f</i> preenchida com zeros	
	<pre> 0 1 0 </pre>	
<p>↙ Origem $f(x,y)$</p> <pre> 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 </pre> <p style="text-align: center;">(a)</p>	<p style="text-align: center;">$w(x,y)$</p> <pre> 1 2 3 4 5 6 7 8 9 </pre> <p style="text-align: center;">(b)</p>	
	Resultado da correlação completa	Resultado da correlação após recorte
<p>↙ Posição inicial de w</p> <pre> 1 2 3 0 0 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 </pre> <p style="text-align: center;">(c)</p>	<pre> 0 9 8 7 0 0 0 0 0 0 0 6 5 4 0 0 0 0 0 0 0 3 2 1 0 </pre> <p style="text-align: center;">(d)</p>	<pre> 0 0 0 0 0 0 9 8 7 0 0 6 5 4 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 </pre> <p style="text-align: center;">(e)</p>
	Resultado da convolução completa	Resultado da convolução após recorte
<p>↙ w rotacionado</p> <pre> 9 8 7 0 0 0 0 0 0 6 5 4 0 0 0 0 0 0 3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 </pre> <p style="text-align: center;">(f)</p>	<pre> 0 1 2 3 0 0 0 0 0 0 0 4 5 6 0 0 0 0 0 0 0 7 8 9 0 </pre> <p style="text-align: center;">(g)</p>	<pre> 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 0 4 5 6 0 0 7 8 9 0 0 0 0 0 0 </pre> <p style="text-align: center;">(h)</p>

Propriedades da Convolução

1. Comutativa

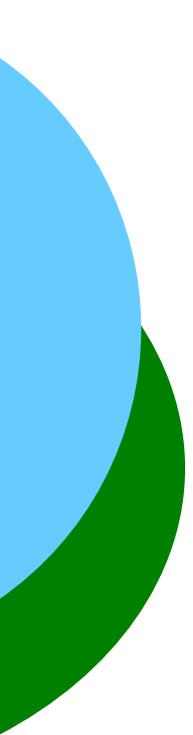
$$f[x] * h[x] = h[x] * f[x] \quad - \text{(Não vale na correlação cruzada)}$$

2. Associativa

$$f[x] * (g[x] * h[x]) = (f[x] * g[x]) * h[x]$$

3. Distributiva

$$f[x] * (g[x] + h[x]) = (f[x] * g[x]) + (f[x] * h[x])$$



Filtros no domínio do espaço

Exemplo: Janela de 3 x 3

Imagem --- $f(x,y)$

a	b	c	
d	e	f	→ y
g	h	i	

↓ x

Template

$$k = 3 \times 3 = 9$$

w_1	w_2	w_3
w_4	w_5	w_6
w_7	w_8	w_9

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot f(x, y)$$

□ $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$: valores dos níveis de cinza na vizinhança de $f(x, y) = e$;

□ w_1 a w_9 : são os “pesos”, ou seja, os valores dos níveis de cinza em cada posição do *Template*.

O valor do pixel $g(x, y)$, na nova imagem, será dado por:

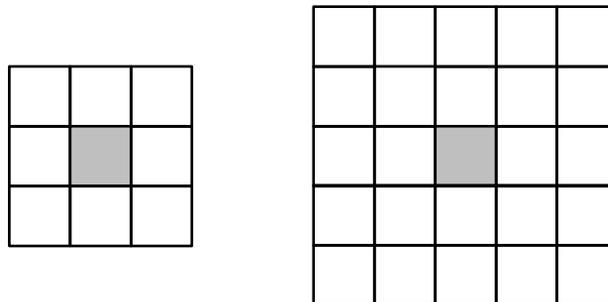
$$g(x, y) = w_1 \cdot a + w_2 \cdot b + w_3 \cdot c + w_4 \cdot d + w_5 \cdot e + w_6 \cdot f + w_7 \cdot g + w_8 \cdot h + w_9 \cdot i$$

Convenção:

- ❑ Máscaras de organização par (2×2 , 4×4 , ...) o resultado é colocado sobre o **primeiro pixel**.



- ❑ Máscaras de organização ímpar (3×3 , 5×5 , ...) o resultado é colocado sobre o **pixel central**.



Convolução e Correlação Cruzada:

- No domínio do espaço, a diferença entre a **Convolução** e a **Correlação Cruzada** reside apenas no espelhamento do Template a ser utilizado, que deve ser feito na Convolução.
- Como, em geral, os Templates são simétricos, a equação da Correlação Cruzada tem sido empregada com o nome de Convolução na área de Processamento de Imagens.

Convoluir um Template com uma Imagem equivale à operação:

Espelhamento, Desloca, Multiplica e Soma

Exemplo de máscara simétrica, onde a operação de convolução e de correlação são idênticas:

Template

1	0
0	1

$T(i,j)$

Imagem Original

1	1	3	3	4
1	1	4	4	3
2	1	3	3	3
1	1	1	4	4

$f(x,y)$

Imagem Final

2	5	7	6	*
2	4	7	7	*
3	2	7	7	*
*	*	*	*	*

$T(i,j) * f(x,y)$

1	1	3	3	4	0
0	1	4	4	3	1
2	1	3	3	3	
1	1	1	4	4	

Os valores marcados com * não podem ser calculados.

Solução para os pixels das bordas:

Podem ser usadas quatro soluções:

1. Preenchimento da imagem com qualquer valor (geralmente zeros) antes do cálculo da imagem final (*padding*) (X^*);
2. Espelhamento dos pixels das bordas (*symmetric**);
3. Replicação dos pixels das bordas (*replicate**);
4. Convolução periódica ou circular (*circular**);

** Função usada pelo Matlab*

Exemplo 1: *Padding* com zeros

Atribuir o valor 0 aos pixels inexistentes fora das bordas da imagem, antes da convolução.

Template

1	1	1
0	0	0
1	1	1

Imagem

	1	2	3	4	5
	0	1	3	4	0
	1	1	3	2	0
	0	0	4	5	6
	1	0	7	8	0

Resultado

1	4	8	7	4
5	11	15	17	11
1	8	17	22	15
3	13	21	20	10
0	4	9	15	11

Primeiro Ponto ==> $(1 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 0) + (0 \times 0) + (0 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 1$

Exemplo 2: “Espelhamento” dos pixels das bordas

Refletir os valores das bordas para preencher os pixels inexistentes fora das bordas da imagem, antes da convolução.

Template

1	1	1
0	0	0
1	1	1

Imagem

	1	2	3	4	5
	0	1	3	4	0
	1	1	3	2	0
	0	0	4	5	6
	1	0	7	8	0

Resultado

5	10	17	19	18
7	11	15	17	16
1	8	17	22	21
5	13	21	20	10
2	12	24	30	25

Primeiro Ponto ==> $(1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 2) + (0 \times 1) + (0 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 5$

Exemplo 3: “Replicação” dos pixels das bordas

Copiar os valores da borda mais externa para preencher os pixels inexistentes fora das bordas da imagem, antes da convolução.

Template

1	1	1
0	0	0
1	1	1

Imagem

	1	2	3	4	5
	0	1	3	4	0
	1	1	3	2	0
	0	0	4	5	6
	1	0	7	8	0

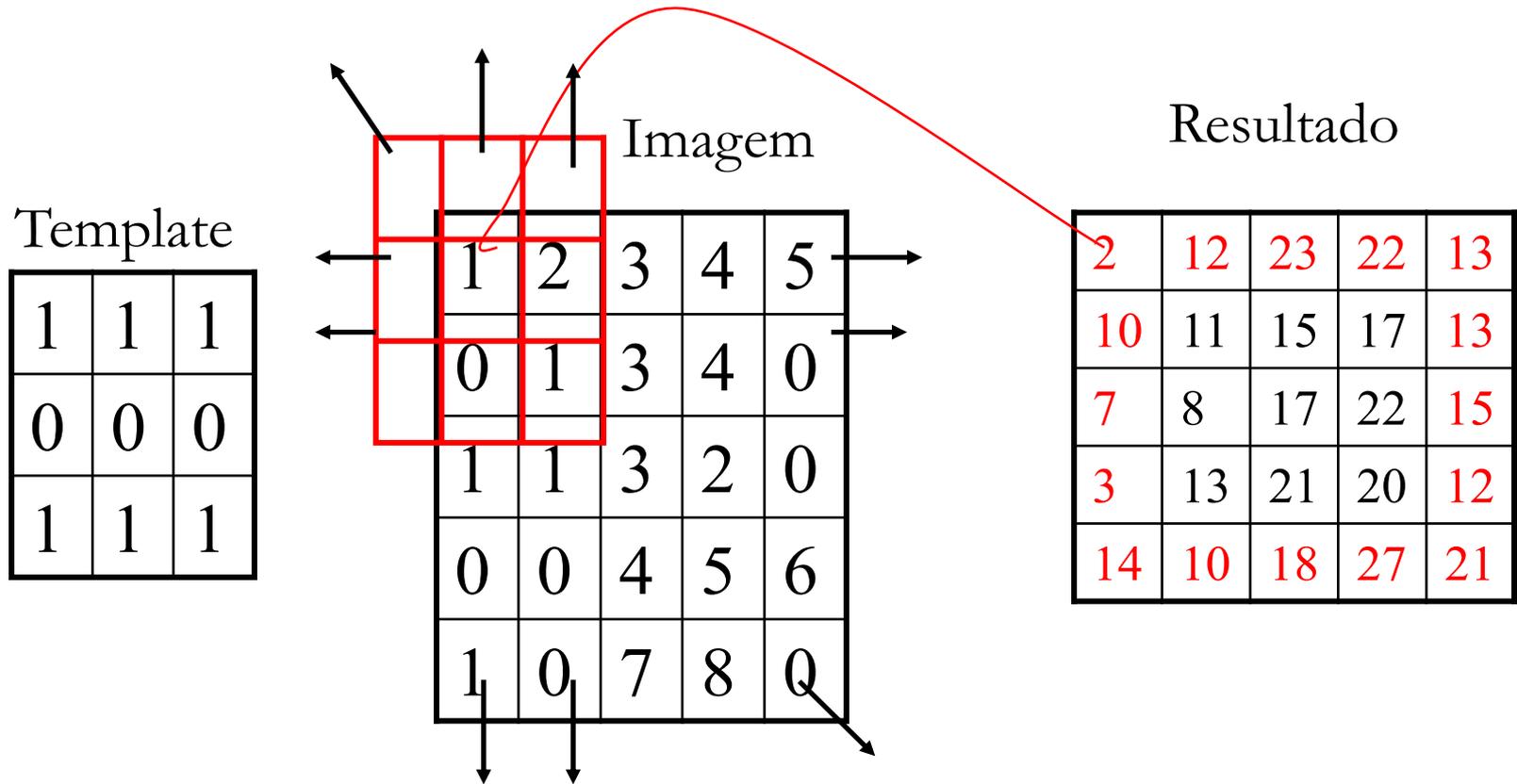
Resultado

5	10	17	19	18
7	11	15	17	16
1	8	17	22	21
5	13	21	20	10
2	12	24	30	25

Primeiro Ponto ==> $(1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 2) + (0 \times 1) + (0 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 5$

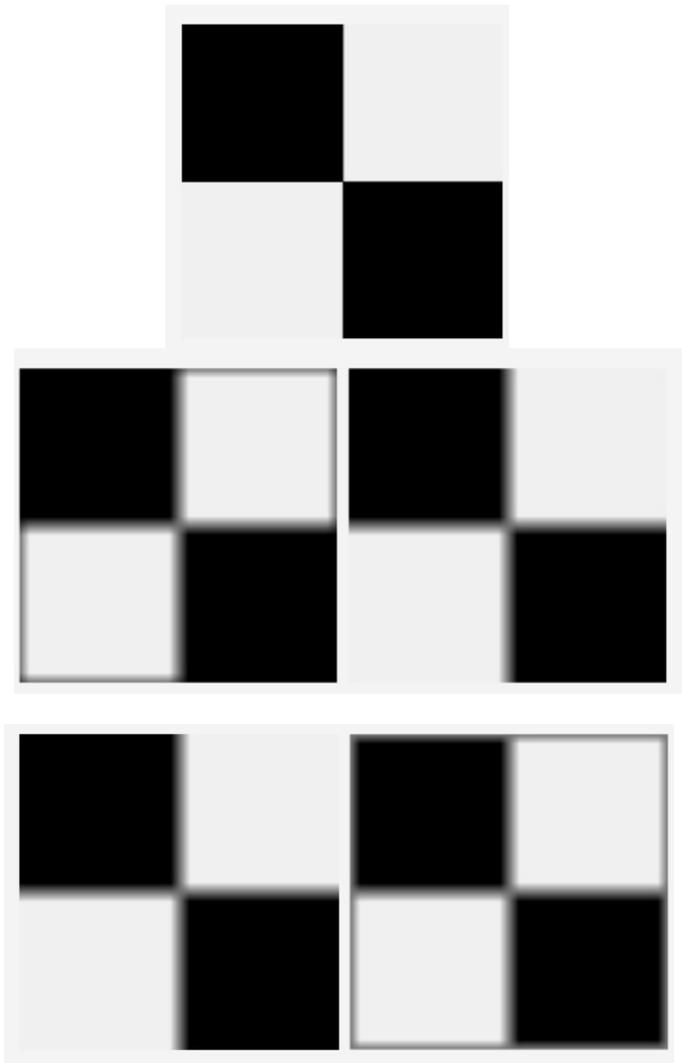
Exemplo 4: Convolução Periódica ou Circular

Preencher os pixels inexistentes fora das bordas da imagem considerando que ela é circular.



Primeiro Ponto ==> $(1 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 0) + (0 \times 5) + (0 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 2$

Efeitos nas bordas da imagem



Convolução da imagem original com um filtro da média

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$



- A) Imagem original
- B) Padding com zeros
- C) Espelhamento
- D) Replicação
- E) Periódica (circular)

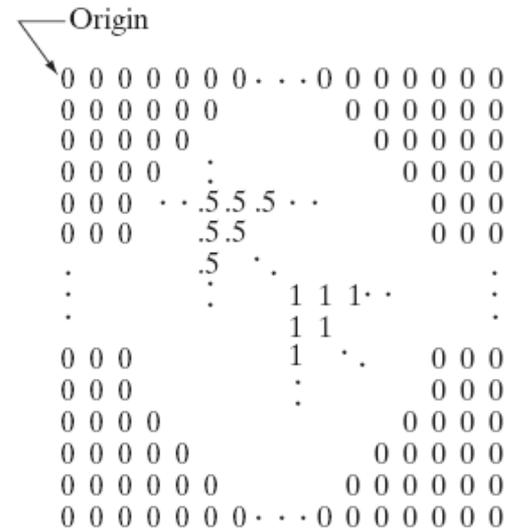
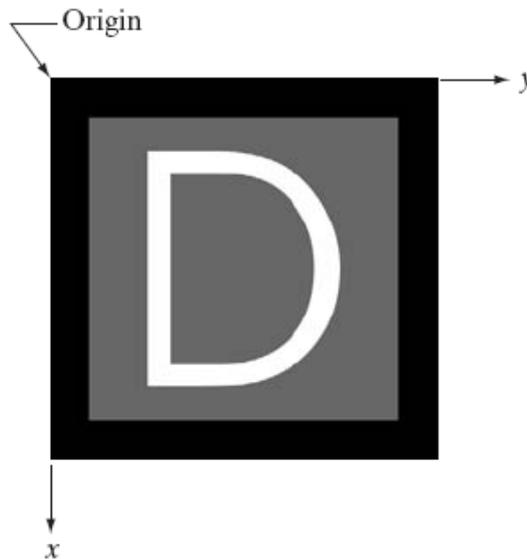
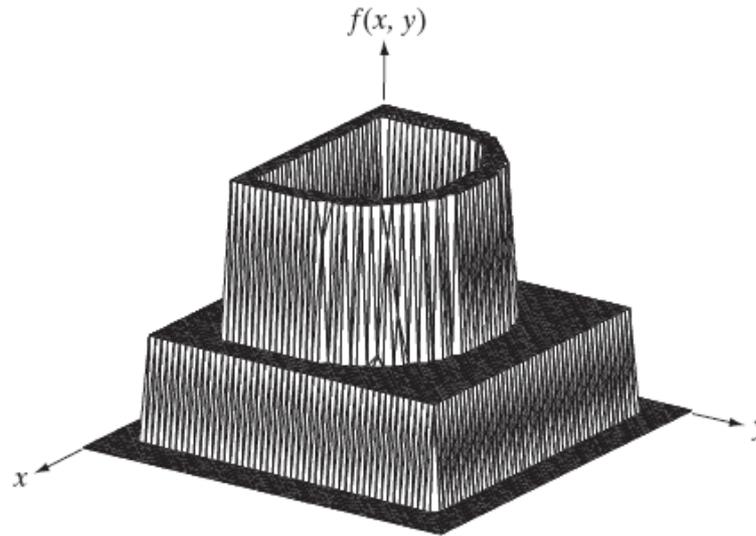
Observações:

- ❑ O custo computacional da **Convolução espacial** é alto.
- ❑ Se a Imagem é de tamanho $M \times M$ e o Template $N \times N$, o número de multiplicações é de $M^2 \cdot N^2$
- ❑ Ou seja, se a Imagem é de 512×512 e o Template é de 16×16 , são necessárias 67.108.864 multiplicações.
- ❑ A alternativa é transformar a Imagem e o Template para o domínio da frequência (Fourier) e multiplicar elemento a elemento.

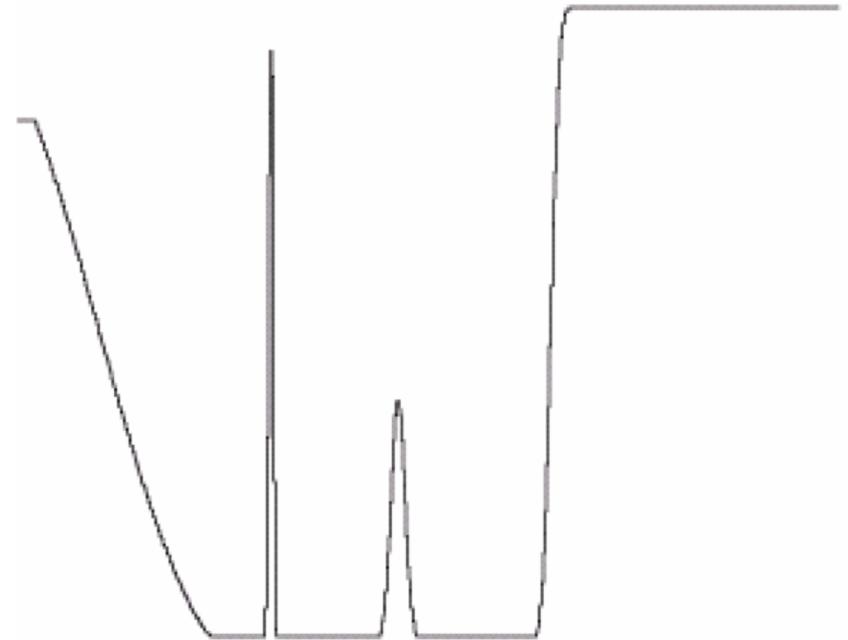
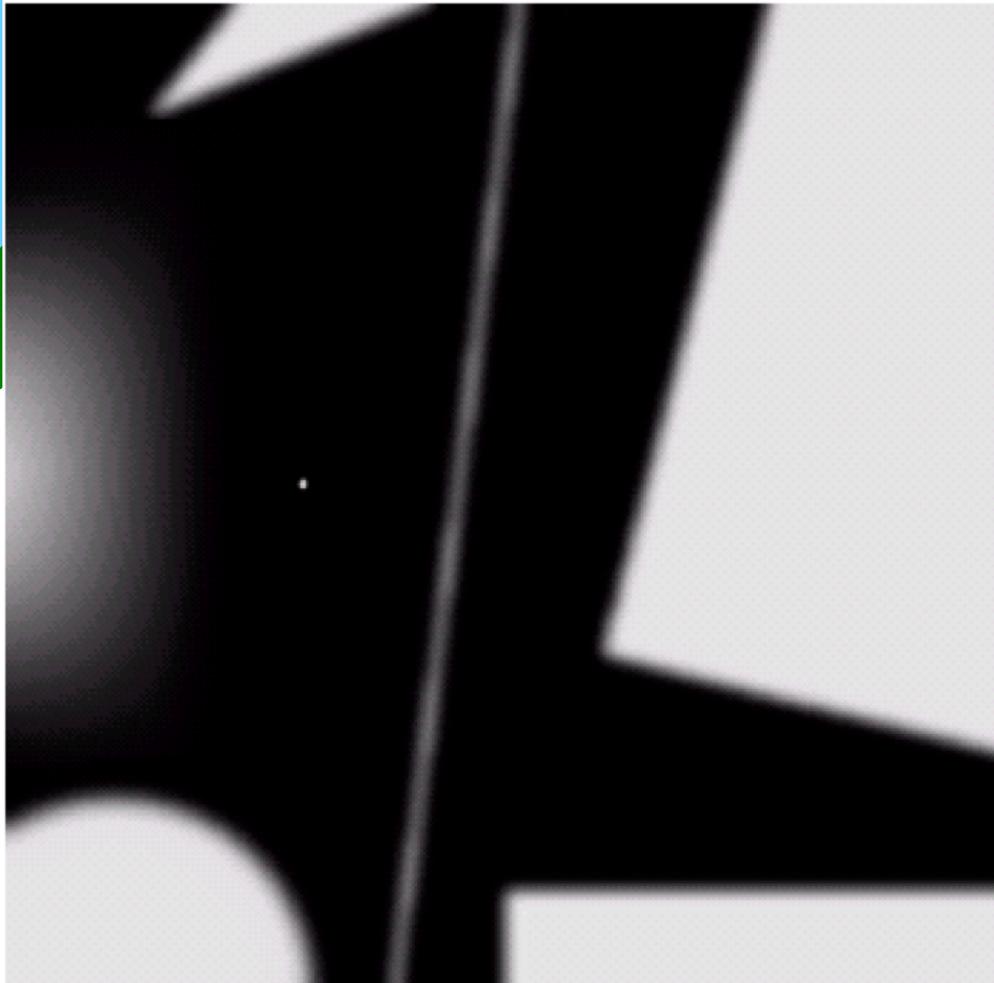
Filtragem Espacial

- Filtros Passa-Baixa
- Filtros Passa-Alta

Representação de uma Imagem como Superfície Isométrica



Perfil radiométrico de uma imagem: altas frequências e baixas frequências



Altas e baixas frequências em uma imagem

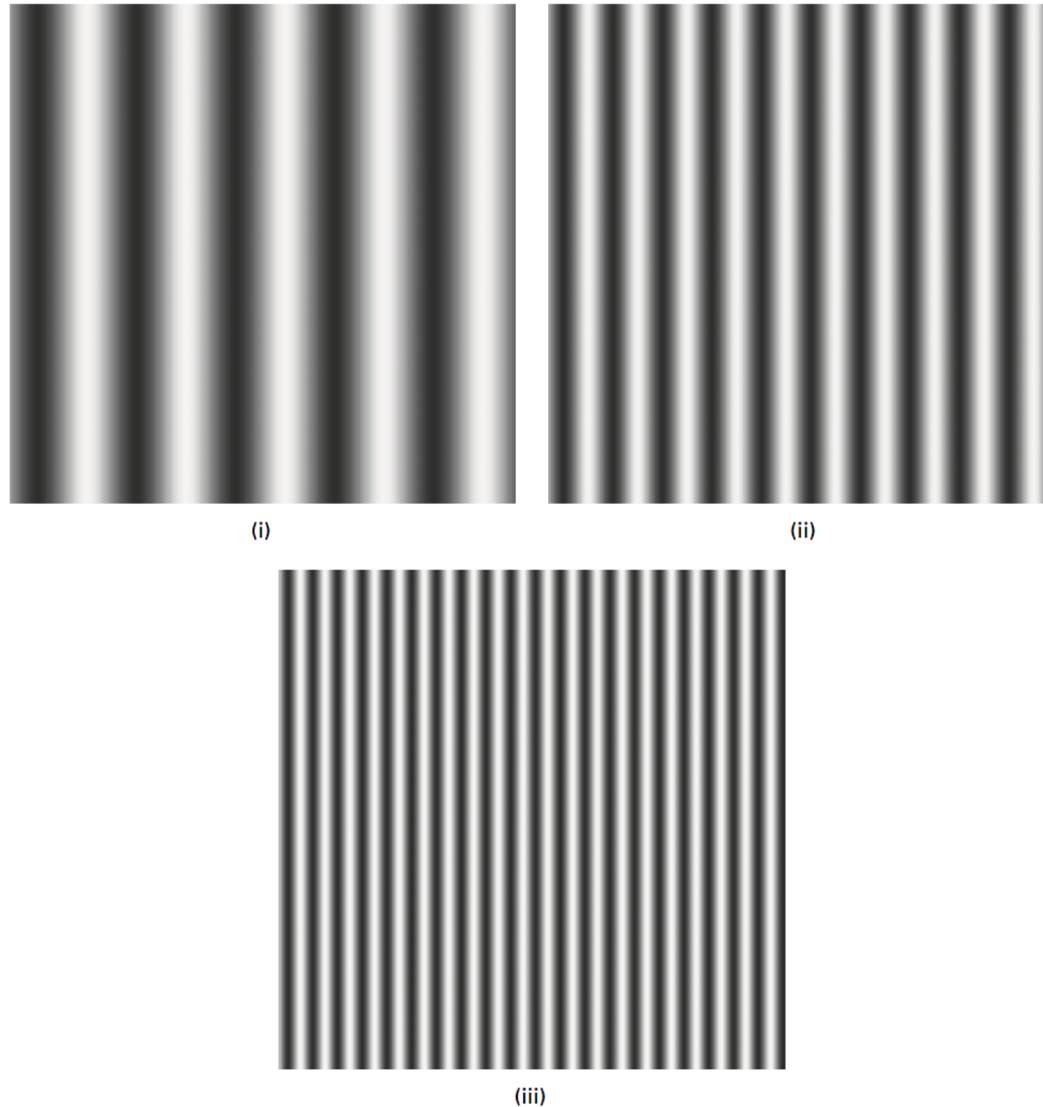


Figure 2.8 Sinusoidal patterns with (i) low, (ii) medium and (iii) high spatial frequency in the horizontal direction.

Filtragem Espacial: Passa Baixa

❑ Uma das aplicações da Convolução espacial de uma Imagem com Templates é a **Suavização (Smoothing) ou Filtragem Passa Baixa**.

❑ Um filtro espacial Passa Baixa é implementado através de uma Máscara que realiza a Média da Vizinhança.

❑ Uma Máscara de Média é tal que seus pesos são positivos e a soma é igual a 1.

➤ Exemplos de algumas Máscaras de Filtros Passa Baixa:

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo de Média da Vizinhança.

$f(x,y)$

20	30	24	34	60	80	89	90	12	00
23	24	56	67	88	99	00	00	00	00
12	23	35	65	66	77	88	99	00	00
11	22	99	99	99	99	99	98	88	88
12	12	12	22	22	44	55	65	77	88
11	44	55	76	87	55	66	33	33	33
12	33	44	55	66	77	88	00	00	00

$g(x,y)$

25

40

$$g(0,0) = (20 + 30 + 24 + 23 + 24 + 56 + 12 + 23 + 35) / 9 = 24,77$$

$$g(0,1) = (30 + 24 + 34 + 24 + 56 + 67 + 23 + 35 + 65) / 9 = 39,77$$

Imagem Original



Vizinhança 3x3



Vizinhança 5x5



Vizinhança 7x7



Vizinhança 15x15



Vizinhança 25x25



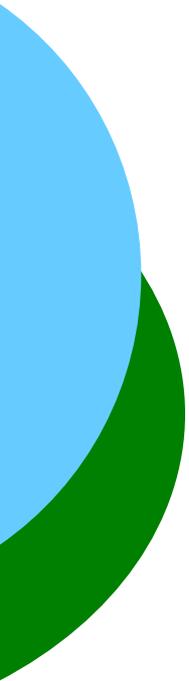
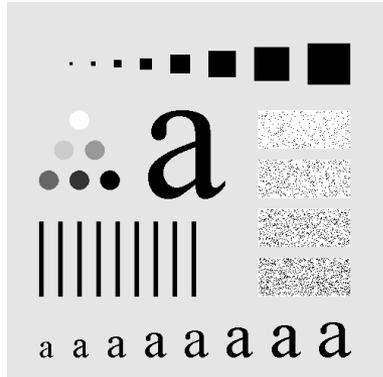
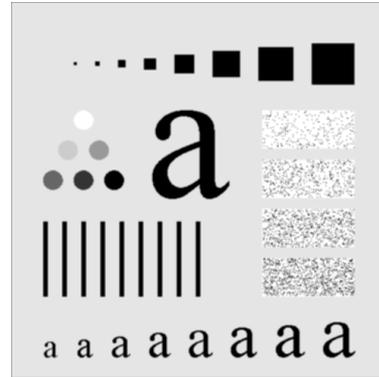


Imagem Original



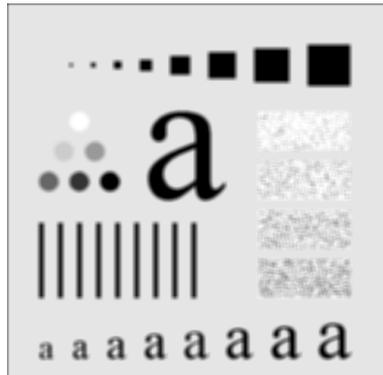
Vizinhança 3x3



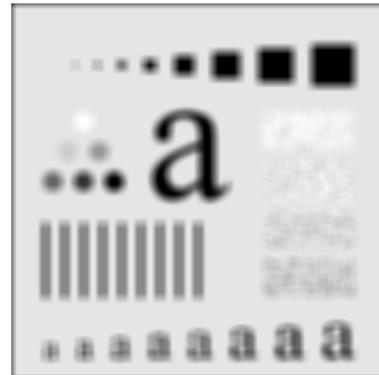
Vizinhança 5x5



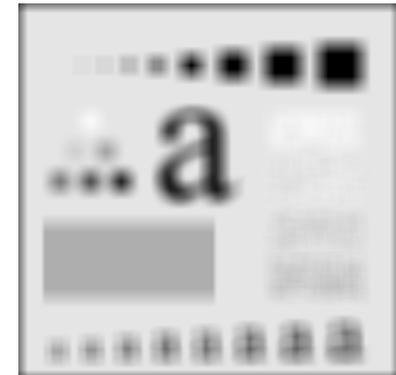
Vizinhança 7x7



Vizinhança 15x15



Vizinhança 25x25



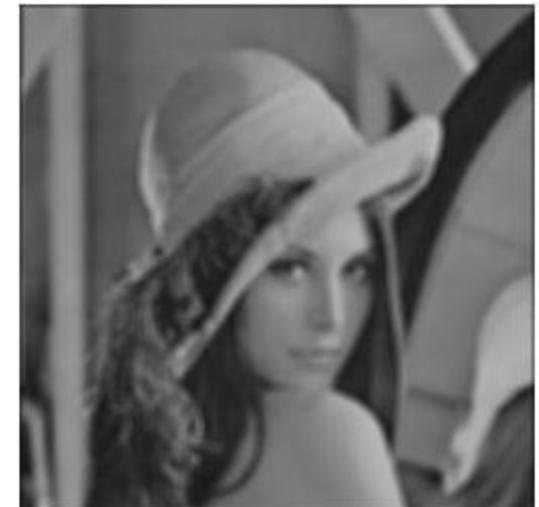
Filtro Passa Baixa – Média da Vizinhança



$$* \frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} =$$



$$* \frac{1}{25} \times \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 5} =$$



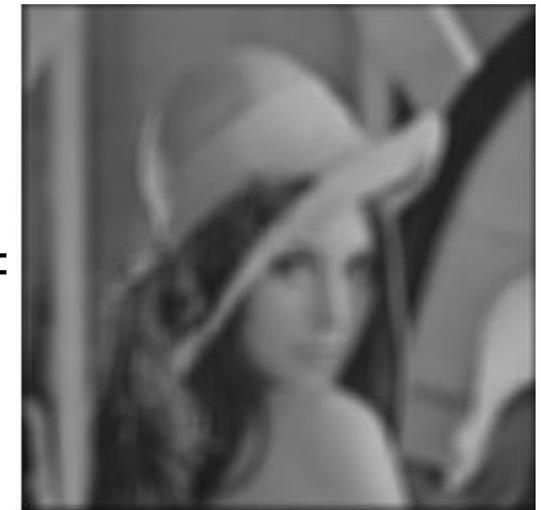
Filtro Passa Baixa – Média da Vizinhança



$$* \frac{1}{49} \times \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 7} =$$



$$* \frac{1}{81} \times \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{9 \times 9} =$$



Filtragem Espacial: **Passa Alta**

- ❑ É chamada de filtro de passa-alta porque detecta na imagem os detalhes finos e mudanças abruptas de níveis de cinza na imagem.
- ❑ A máscara do filtro passa alta deve ter pesos de tal forma que a soma seja igual a zero.

Exemplos de máscaras de filtros passa alta:

Normalizado

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Normalizado

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operador Laplaciano

Filtro Passa Alta – Detector de Altas Frequências



Normalized

$$* \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$



255 -



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências



+



=



+



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências



+



=



Filtro Passa Alta – Detector de Altas Frequências

Não-normalizado



*

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

=



255 -



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências



+



=



+



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências



+



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

Como montar um “template” para a mascara de aguçamento?



*



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

1) Filtro que detecta apenas as bordas e detalhes (passa-alta)



*

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

2) máscara que gera a mesma imagem após a convolução



*

0	0	0
0	1	0
0	0	0

=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

Máscara de aguçamento =
imagem da detecção das bordas + imagem original

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 9 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

Máscara de aguçamento



*

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1

=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

E se for usada a normalização do template?



*



=



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

1) Máscara que detecta apenas as bordas e detalhes (passa-alta)



Normalizado

$$* \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} =$$



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

2) Máscara que gera a mesma imagem após a convolução



Normalizado

$$* \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} =$$



Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

Máscara de aguçamento =
imagem original + detecção das bordas

$$\frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} + \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 17 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Máscara de AGUÇAMENTO (*Sharpening*) - realce de altas frequências

Máscara de aguçamento (normalizado)

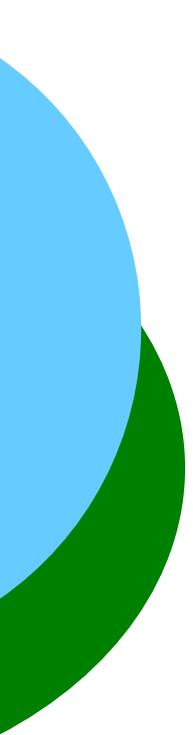


$$* \frac{1}{9} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 17 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array} =$$





<http://setosa.io/ev/image-kernels/>



FIM