# AULA DE REVISÃO

Vanderlei da Costa Bueno

Abril, 2020

Suponha que um engenheiro inspeciona determinada máquina em períodos discretos de tempo e observa se a máquina quebrou durante o período anterior. Independente do período, a probabilidade da máquina quebrar em determinado período é $p, 0 < p < 1$. Note que estamos observando se a máquina falha (o

sucesso é a quebra) e portanto considerando ensaios de Bernoulli independentes e identicamente distribuidos comparâmetro $p$. Suponha que $p = 0,1$

$$P(X = k) = 0,1^k 0,9^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Suponha que um engenheiro inspeciona determinada máquina em períodos discretos de tempo e observa se a máquina quebrou durante o período anterior. Independente do período, a probabilidade da máquina quebrar em determinado período é $p, 0 < p < 1$. Note que estamos observando se a máquina falha (o

sucesso é a quebra) e portanto considerando ensaios de Bernoulli independentes e identicamente distribuidos comparâmetro $p$. Suponha que $p = 0,1$

$$P(X = k) = 0,1^k 0,9^{1-k}, \quad k = 0,1.$$

Considere que observamos por 10 períodos e contamos N,o número de falhas ocorridas. N é uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros 10 e 0,1 ($N \sim B(10, 0, 1)$).

$$P(N = k) = \binom{10}{k} 0, 1^k 0, 9^{10-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., 10.$$

O número esperado de falhas neste período é $\mu = 10.0, 1 = 1$ e a variância é 0,9. Qual a probabilidade de nste período termos ao menos 2 falhas:

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N < 2) = 1 - [P(N = 0) + P(N = 1)]$$

$$= 1-[\binom{10}{0} 0, 1^0 0, 9^{10} + \binom{10}{1} 0, 10, 9^9] = 1-[0, 9^{10} + 10.0, 1.0, 9^9] = 0, 74.$$

# Aproximação da Binomial pela Poisson

O que acontece se observamos um grande número de períodos, por exemplo, $n = 100$ e desejamos calcular a probabilidade de termos exatamente 49 falhas. Seja $N^*$ o número de falhas nos 100 períodos observados

$$P(N^* = 49) = \binom{100}{49} 0,1^4 90,9^{51}$$

O cálculo de quantidades tais como $\binom{100}{49}$ não é fácil e usamos uma aproximação:

A distribuição binomial, $Y \sim B(n, p)$, pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = np$ quando $n$ é grande e $p$ pequeno. Observe que

# Aproximação da Binomial pela Poisson

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\frac{1}{k!}\frac{n.(n-1).(n-2)....(n-k+1)}{n^k}\lambda^k(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^n \to \frac{\exp[-\lambda]\lambda^k}{k!},$$

quando $n \to \infty$.

Portando a distribuição de $N^*$ aproxima-se da distribuição de Poisson com parâmetro ($M \sim P(\lambda)$ onde $E[M] = \lambda = E[N^*] = 100.0,1 = 10$

$$P(M = k) = \frac{e^{-10}10^k}{k!}; \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

e

$$P(N^* = 49) \simeq P(M = 49) = \frac{e^{-10}10^{49}}{49!} = 7^{-19}$$

# Distribuição Geométrica

Se observamos continuamente, qual a probabilidade da máquina não quebrar até o *n*-ésimo período.
Se $X$ representa o número de períodos até a primeira quebra, então $X$ tem distribuição geométrica

$$P(X = k) = p(1-p)^k; \quad k = 0, 1, 2, .....$$

A probabilidade da máquina não quebrar até o *n*-ésimo período é

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1}.p = p \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = (1-p)^n.$$

# Distribuição Geométrica

Se a máquina funcionou por $n$ períodos consecutivos, a probabilidade de funcionar por $m$ períodos adicionais é

$$P(X > m + n | X > n) = \frac{P(X > m + n, X > n)}{P(X > n)} =$$

$$\frac{P(X > m + n}{P(X > n)} =$$

$$\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P(X > m).$$

Esta é a propriedade de falta de memória de uma distribuição. Ela caracteriza a distribuição geométrica como a única variável aleatória discreta com tal propriedade. Concluimos que a máquina em uso é equivalente à máquina nova.

# Distribuição de Poisson

Em uma Central Telefônica, o fluxo de chamadas em certos períodos é intenso e o número de tais chamadas pode ser modelado com uma distribuição de Poisson. Suponha que o parâmetro $\lambda$ seja 8 chamadas por segundo. A probabilidade de que em um segundo tenhamos ao menos 5 chamadas é

$$P(N \geq 5) = 1 - P(N < 5) = 1 - \{P(N = 0) + P(N = 1) +$$

$$P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)\} =$$

$$1 - \{0,0003 + 0,0027 + 0,0107 + 0,0286 + 0,0573\} = 0,9004.$$

Se a média da distribuição é 8 chamadas por segundo, em 3 segundos teremos uma média de $\lambda\hat{*} = 3.8 = 24$. Portanto, a probabilidade de que tenhamos 2 chamadas em 3 segundos é

$$P(N^* = 2) = \frac{\exp[-24]24^2}{2!} = 1,0872 \exp[-8].$$

# Processo de Poisson

No exemplo anterior poderíamos perguntar qual a probabilidade de que ter $k$ chamadas em $t$ segundos. De maneira lógica escreveríamos

$$P(N(t) = N = N^* = k) = \frac{\exp[-8.t]8t^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ....$$

Na expressão em que adotamos $N(t) = N^* = N$, descrevemos uma distribuição (processo) de Poisson com média $8t$ e de parâmetro $\lambda = 8$ que denominamos intensidade do processo.

# Processo de Poisson

O processo de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ com intensidade $\lambda$, tem distribuição de Poisson

$$P(N(t)=k)=\frac{\exp[-\lambda.t](\lambda.t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,....$$

que é uma função do tempo $t\in\Re^+$ e aleatória $w\in\Omega$, isto é, para cada $t>0$, $N(t)$ é uma variável aleatória. Portanto $(N(t))_{t\geq 0}$ é uma familia de variáveis aleatórias denominada de processo estocástico (homogêneo)de Poisson. O processo de Poisson caracteriza a ocorrência de eventos aleatórios no tempo.
O Sinistros ocorrem contra uma apólice de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de $0,3$ a cada ano. Qual a probabilidade de que, nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros?
Claramente,

$$P(N(5)=3)=\frac{\exp[-0,3.5](0,3.5)^3}{3!}=0,08.$$

# Ocorrência Aleatória de eventos no tempo

A escolha aleatória, ou casual, de um elemento da população finita $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, é através da distribuição uniforme que associa a cada elemento a probabilidade $\frac{1}{n}$. Como veremos no próximo capítulo a ocorrência aleatória de eventos em $(0, t]$ se dá de acordo com a distribuição uniforme em $(0, t]$, através da função densidade de probabilidade $f(s) = \frac{1}{t}$ se $s \in (0, t]$ e 0 caso contrário, que atribui probabilidades iguais a cada intervalo de igual comprimento. O que podemos dizer quando $t \to \infty$, isto é, da ocorrência de eventos em $\Re^+$ ?

# Ocorrência Aleatória de eventos no tempo

Seja $(N(t))_{t\geq 0}$ o processo estocástico que, para cada $t$, conta o número de eventos que ocorrem em $(0,t]$. O número de eventos no intervalo $(s,t]$ é denotado por $N(t)-N(s)$. A ocorrência aleatória de eventos no tempo se caracteriza pela ocorrência de eventos instantaneamente no tempo. $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda.t$. $\lambda$ é denominada intensidade ( ou taxa) do processo.

# Exemplo

Em uma indústria, para verificar se a ocorrência de acidentes com operários ocorriam ao acaso, observou-se o número de acidentes por hora durante um certo número de dias (24 horas por dia)obtendo os dados:

| No. de acidentes por hora | No. de horas |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 1 | 152 |
| 2 | 60 |
| 3 | 30 |
| 4 | 13 |
| 5 | 9 |
| 6 | 7 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |

# Exemplo

Sobre as 480 horas observadas, o número médio de acidentes por hora é

$$\frac{1}{480}\{200.0+152.1+60.2+30.3+13.4+9.5+7.6+5.7+4.8\} = 1,2.$$

Se os acidentes ocorrecem aleatóriamente, $N$, o número de acidentes por hora teria, aproximadamente, uma distribuição de Poisson com média $1,2$. Aceitando tal distribuição como verdadeira, o número esperado de horas com k acidentes é $480.P(N=k) = 480.\frac{\exp[-1,2](1,2)^k}{k!}$ e o o número esperado de horas com $0, 1, 2, \ldots$ acidentes são

# Exemplo

| No. de acidentes por hora | No. esperado de horas |
|---|---|
| 0 | 144,6 |
| 1 | 173,5 |
| 2 | 104,1 |
| 3 | 41,6 |
| 4 | 12,9 |
| 5 | 3 |
| 6 | 0,6 |
| 7 | 0,1 |
| 8 | 0 |

que podem ser considerados diferentes dos valores observados e concluimos que os acidentes não estão ocorrendo aleatóriamente.