## - Sistemas multiperiódicos



Vamos agora discutir as propriedades de sistemas periódicos em espaços de fase de dimensão $2n$

$$\vec{\eta} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

Por simplicidade, vamos focar em hamiltonianas independentes do tempo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{\eta}) \,, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{H} = \text{cte}.$$

A condição $\mathcal{H}(\vec{\eta}) = E = \text{cte}$ define uma superfície de energia constante $\Sigma_E$:

$$\dim(\Sigma_E) = 2n - 1$$

- Exemplo: um grau de liberdade

Nesse caso, o espaço de fase possui dimensão 2 e o representaremos como o $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{H}(q, p) = p^2/2m + V(q) = E \,,$$

define uma curva no plano $(q, p)$

* $V(q) = \dfrac{m\omega^2}{2} q^2$, oscilador harmônico

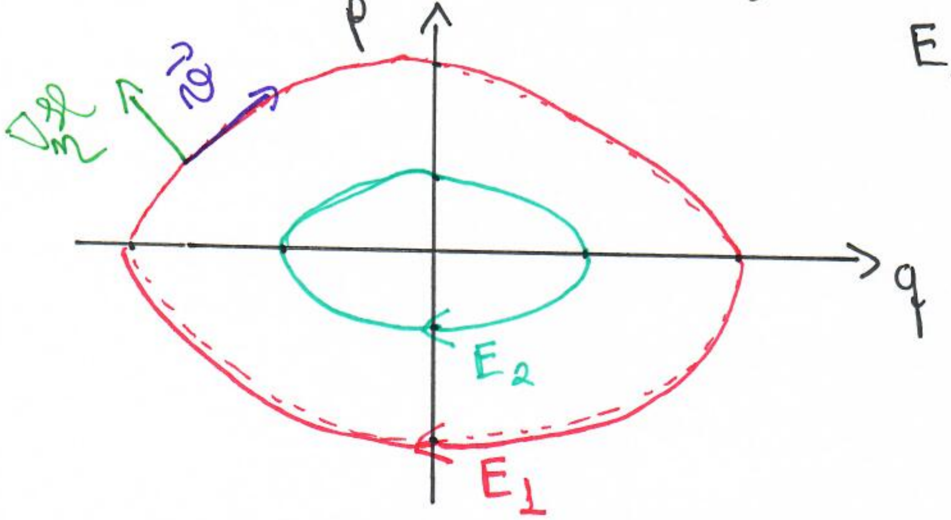
$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} = 1 \,,$$ que é a

equação de uma elipse com semieixos

$a = \sqrt{2E/m\omega^2}$ e $b = \sqrt{2mE}$

Encontramos assim nossa nossa "superfície" (curva)

$\Sigma_E$ ( dimensão $= 2-1 = 1$ )




$E_1 > E_2$

Durante um período $T = 2\pi/\omega$ o sistema passa por todos os estados $(q,p)$ compatíveis com $\mathcal{H}(p,q) = E$. Nesse caso, $T$ não depende de $E$.

$\nabla_\eta \equiv \left( \partial/\partial q \,,\, \partial/\partial p \right)$, gradiente no espaço de fase

$\nabla_\eta \mathcal{H} \perp \Sigma_E$

Definimos também o vetor tangente $\vec{v}$: 3

$$d\vec{\eta} = (dq, dp) = (\dot{q}, \dot{p})\, dt$$

$$= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right) dt$$

$$= \underbrace{\tilde{J} \cdot \nabla_\eta \mathcal{H}\, dt}_{\vec{v}}, \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com isso, podemos avaliar:

$$\vec{v}^T \cdot \nabla_\eta \mathcal{H} = \left(\partial \mathcal{H}/\partial p, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \partial \mathcal{H}/\partial p \end{pmatrix} = 0$$

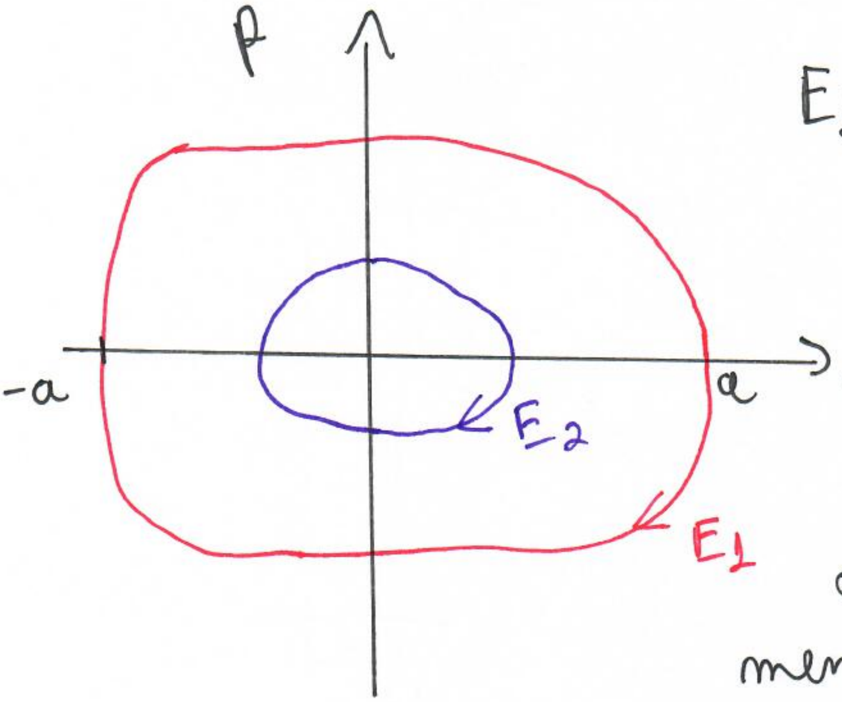
$$\Longrightarrow \vec{v} \perp \nabla_\eta \mathcal{H}$$

Obs.: $\vec{v}$ é contínuo e diferenciável ao longo da curva fechada.

* $V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \lambda/_4\, q^4$, oscilador anarmônico

$$\mathcal{H} = p^2/_{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{\lambda}{4} q^4 = E$$

Nesse caso, as "superfícies" $\Sigma_E$ não são mais elipses




$E_1 > E_2$

A curva $\Sigma_E$ é fechada também. O período agora depende de $E$, e o movimento deixa de ser harmônico.

$$\mathcal{H} = E_1 \Rightarrow -a \leq q \leq a \quad \text{pontos de retorno}$$

* $q = \theta$, $V(\theta) = -mgl\cos\theta$, pêndulo simples

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta = E$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{E}{mgl} + \frac{p_\theta^2}{2m^2l^3} \geq -\frac{E}{mgl}$$

Agora, há dois tipos de curvas de energia constante

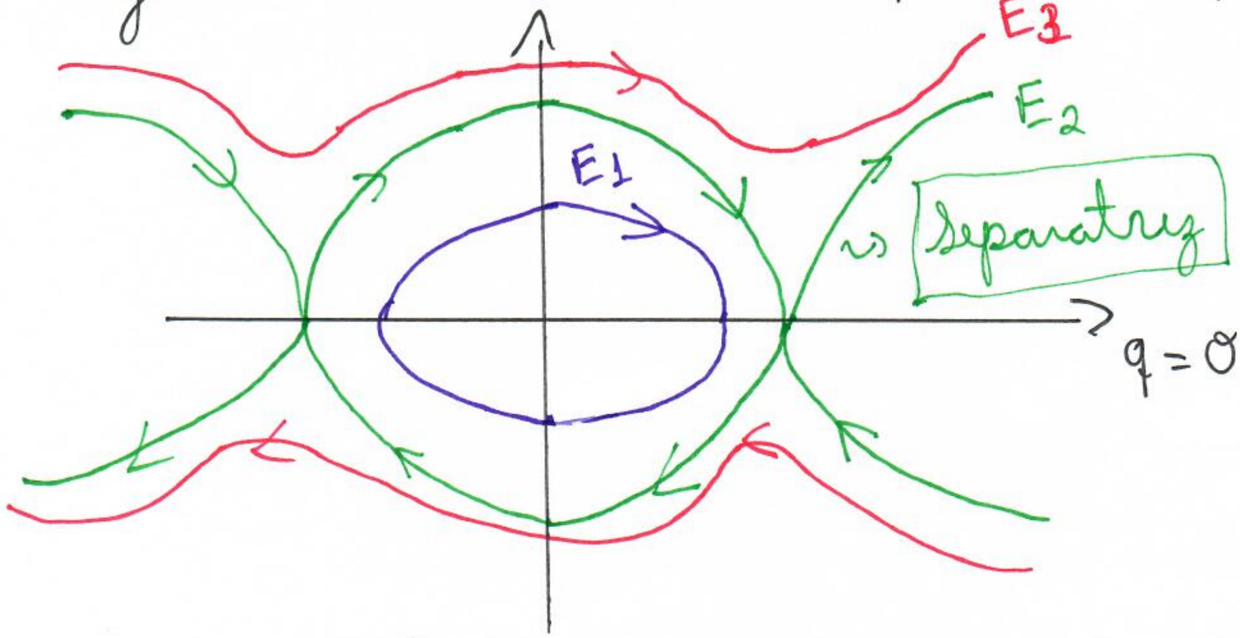
(i) $|E| < mgl \Rightarrow \exists\, \theta_0 \in [0, \pi]$, $\cos\theta_0 = -\dfrac{E}{mgl}$

$\cos\theta \geq \cos\theta_0 \Rightarrow -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 < \pi$

Pêndulo oscila sem atingir a altura máxima em $\theta = \pi$.

(ii) $|E| > mgl$

Não há restrição no intervalo de $\theta$, pêndulo possui energia o suficiente para girar ao redor de seu ponto de apoio




$E_1 < E_2 = mgl < E_3$

No caso (i), a curva no plano $(q, p)$ é fechada e o movimento é periódico.

Para pequenas oscilações, $|E + mgl| \ll mgl$

$\Rightarrow |\theta(t)| \ll \;\forall t \Rightarrow$ período $T \simeq 2\pi\sqrt{l/g}$ ⑥

No caso mais geral, $T \equiv T(E)$ (depende de $E$).

No caso (ii), a curva no plano $(q,p)$ é aberta, $-\infty < \theta < \infty$, mas ainda podemos definir um período porque $p(t) = p(\theta(t))$ é função periódica de $\theta$
$\rightsquigarrow$ período é o tempo para dar uma volta completa!

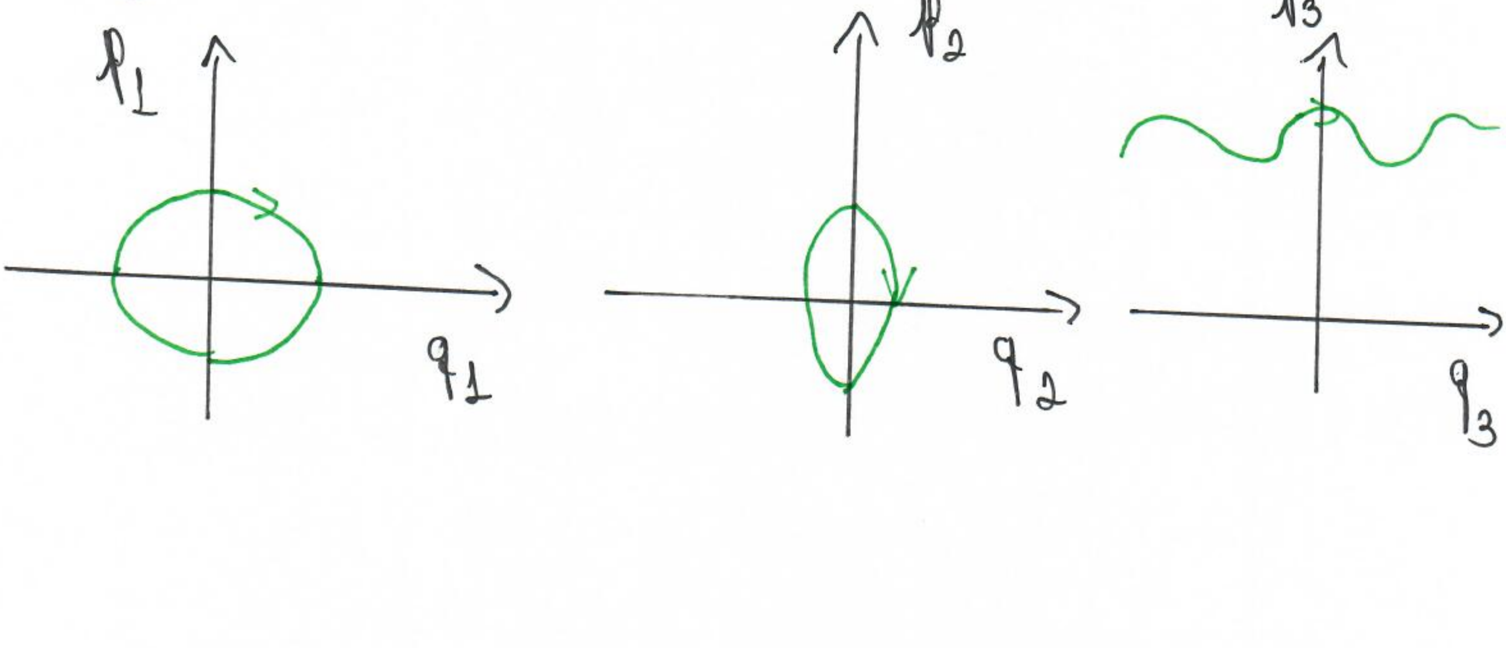
Podemos introduzir uma nomenclatura geral

- libração: movimento descrito por curvas fechadas no plano $(q,p)$; ambos $q$ e $p$ oscilam entre valores limitados.
- rotação: movimento descrito por curvas abertas no plano $(q,p)$, mas tal que $p$ é uma função periódica de $\theta$; assim, apenas $p$ oscila entre valores limitados.

* Mais graus de liberdade

| $n$ | dim espaço de fase | dim $(\Sigma_E)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 6 | 5 |
| 4 | 8 | 7 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Definição: sistema multiperiódico é um sistema em que todas as projeções do movimento nos planos $(q_j, p_j)$ são do tipo libração ou rotação



- Exemplo: oscilador harmônico 2D



$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{m}{2}\left(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2}_{\mathcal{H}_1(q_1,p_1)} + \underbrace{\frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 q_2^2}_{\mathcal{H}_2(q_2,p_2)}$$

Note que $\underset{\text{(confira!)}}{\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}_1\} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}_2\} = 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}\} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1\} + \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = 0$$

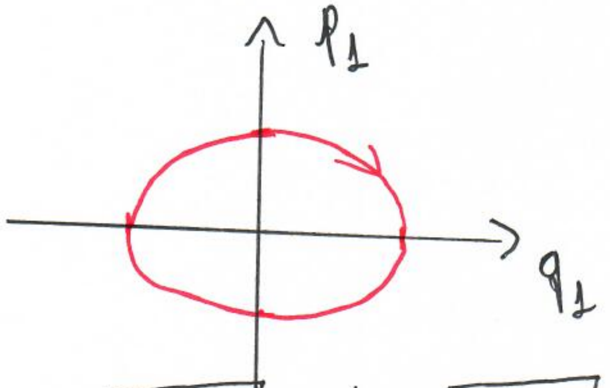
$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2 = \{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}\} = \{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1\} + \{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2\} = 0$$

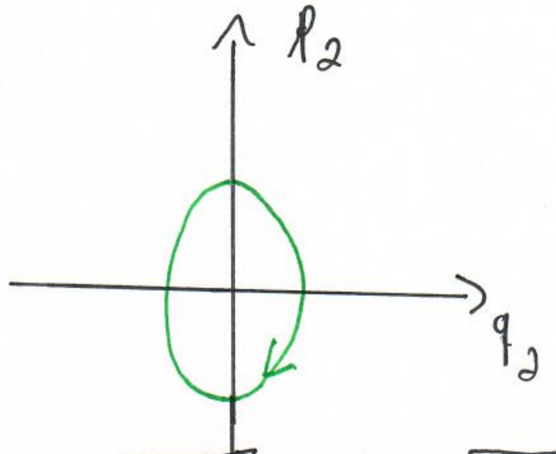
$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são conservadas separadamente

$\mathcal{H}_1 = E_1$, $\mathcal{H}_2 = E_2$, $\mathcal{H} = E \Rightarrow E = E_1 + E_2$

A energia total distribui-se em duas partes que são conservadas separadamente, o que nos dá duas constantes do movimento independentes. O movimento fica assim restrito a uma superfície de dimensão menor que $\Sigma_E$, que tem dimensão 3.

Quando projetamos a trajetória em cada um dos planos conjugados $(q_j, p_j)$ temos o análogo do oscilador 1D:



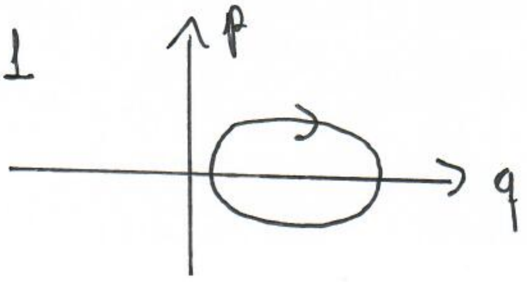




$a_1 = \sqrt{2E_1/m\omega_1^2}$, $b_1 = \sqrt{2mE_1}$ $\qquad$ $a_2 = \sqrt{2E_2/m\omega_2^2}$, $b_2 = \sqrt{2mE_2}$

O movimento no espaço de fase ocorre na superfície 2D formada pelo produto direto, ou cartesiano, dessas curvas. Qual é essa superfície?

<u>Definição</u>: M é a hipersuperfície ("variedade") formada pelo conjunto de estados $(q,p)$ compatíveis com as constantes do movimento

• $n=1$




$\mathcal{H} = E$

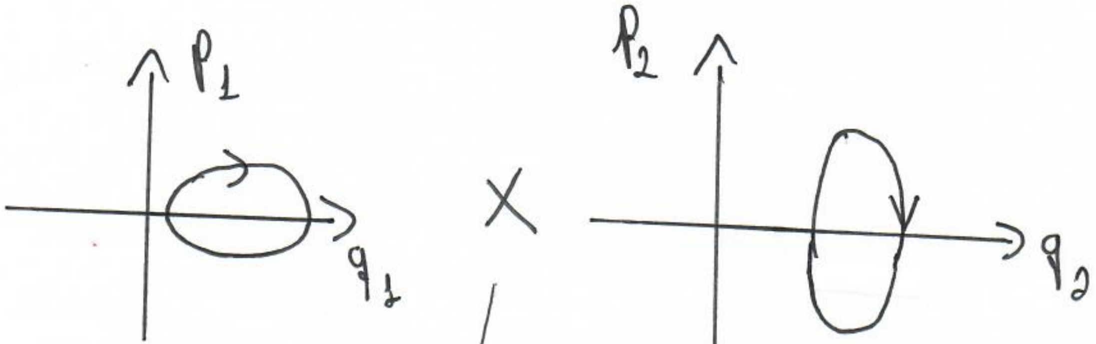
$M = \Sigma_E \cong S^1$
$\cong T^1$

M é topologicamente equivalente a um circunferência ("esfera unidimensional" $S^1$) ou a um "toro unidimensional" $T^1$

• $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x' = \frac{x-x_0}{a}$, $y' = y/b$

$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = 1$.

• $n = 2$




produto cartesiano

$M \cong T^1 \times T^1 = T^2$ (toro bidimensional)

$M \subset \Sigma_E$. $\dim(M) = 2$, $\dim(\Sigma_E) = 3$

• $n$ qualquer

$n$ constantes de movimento

$M \cong T^1 \times T^1 \times \dots \times T^1 = T^n$, toro $n$-dimensional ou $n$-toro

A hipersuperfície M é chamada de toro invariante. Fixando as constantes do movimento, fixamos M. O estado do sistema, no espaço de fase, é restrito a essa hipersuperfície $\forall\, t$.

- Definição paramétrica de $T^2$

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = (R + r\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z(\theta,\varphi) = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$\theta, \varphi \rightarrow$ ângulos contidos em $0$ e $2\pi$

$R \rightarrow$ distância do centro do tubo ao centro do toro

$r \rightarrow$ raio do tubo

Definição implícito em coordenadas cartesianas

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$ (simetria axial ao longo do eixo-$z$)

Podemos pensar no toro se "enrolarmos" uma região periódica


Isso ajuda a entender a equivalência entre a topologia de $T^1 \times T^1$ e $T^2$.

integrabilidade -

Na nossa discussão dos parênteses de Poisson ficou claro que há uma relação direta entre simetrias e leis de conservação (levando a quantidades conservadas e constantes do movimento). Como fizemos no problema de Kepler ou no pião simétrico, utilizamos essas quantidades conservadas para reduzir progressivamente a ordem efetiva do sistema. Nesses dois exemplos, o problema se reduz a uma dimensão com um potencial efetivo. Se houver simetrias o suficiente e quantidades conservadas independentes, essa redução pode então ser completa levando a uma solução completa das equações do movimento: integrabilidade. Para um sistema com $n$ graus de liberdade, $H$ depende, em princípio, de $n$ $q$'s e $p$'s e do tempo $t$. Embora não existe uma definição única de integrabilidade, acontece que para uma solução completa ser obtida por meio de uma sequência de integrações, precisamos de $n$ funções independentes $F_i$, $i=1,\dots,n$, nas mesmas variáveis que sejam constantes do movimento. Isso quer dizer que precisamos do mesmo número de simetrias em relação ao número de graus de liberdade para que um sistema seja dito integrável. Se não existe esse conjunto $n$ de quantidades conservadas, o sistema é dito não integrável.

Sabemos que

$$\frac{dF_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial t} + \{F_i, H\} = 0$$

Se assumimos um sistema autônomo, no qual nem $H$ ou $F_i$ dependam explicitamente do tempo, temos:

$$\frac{dF_i}{dt} = \{F_i, H\} = 0$$

Pelo teorema de Poisson, $d/dt\{F_i, F_j\} = 0$, mas aqui queremos algo extra:

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad , i,j = 1,2,\dots, n$$

Ou seja as funções $F_i$ estão em involução

Um sistema hamiltoniano conservativo com $n$ graus de liberdade é dito integrável se existem $n$ constantes do movimento independentes e em involução:

a) $\{F_i, H\} = 0 \quad , i = 1,\dots, n$

b) $\{F_i, F_j\} = 0 \quad , i,j = 1,\dots, n$

c) Os vetores $\nabla_\eta F_i = (\nabla_q F_i, \nabla_p F_i)$ são linearmente independentes em cada ponto do espaço de fase.

Essa definição de integrabilidade tem uma importante consequência sobre a região ocupada por uma partícula no espaço de fase.

Cada uma das $n$ funções $F_i =$ constante confina uma trajetória particular a um subespaço de dimensão $(2n-1)$ dentro do espaço $2n$ dimensional.

A intersecção de todas essas restrições $M$ confina as trajetórias a um espaço de dimensão $n$. Essa é uma restrição muito forte na maneira com a qual uma trajetória pode se mover no espaço de fase.

A intersecção particular $M$ para o movimento é determinada pelas condições iniciais.

Podemos ter uma intuição acerca dessas superfícies $M$ por meio da condição de involução

$$[F_i, F_j] = \nabla_q F_i \nabla_p F_j - \nabla_p F_i \nabla_q F_j$$

$$= (\nabla_q F_i, \nabla_p F_j) \cdot \underbrace{(\nabla_p F_j, -\nabla_q F_j)}_{\vec{v}_j}$$

$$= \nabla_\eta F_i \cdot \vec{v}_j = 0$$

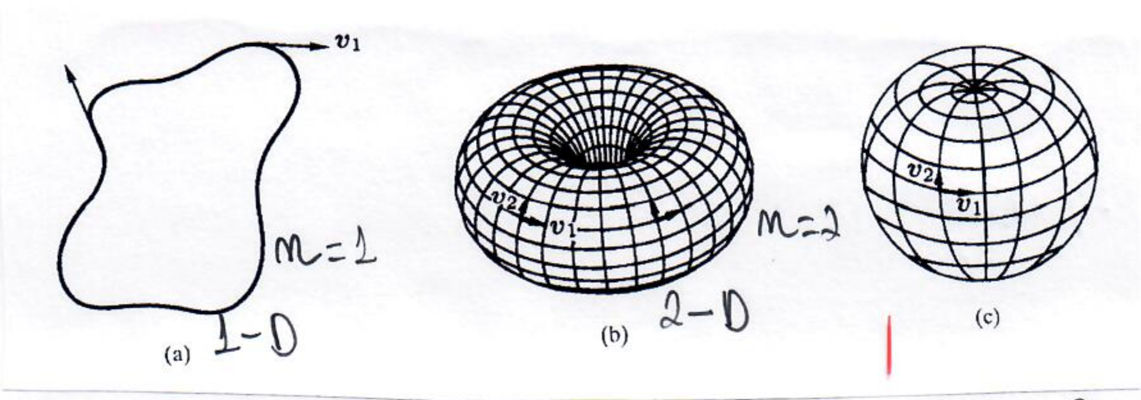
$$\Rightarrow \vec{v}_j \perp \nabla_\eta F_i$$

Sabemos que $\nabla_\eta F_i$ é um vetor normal à superfície $F_i =$ constante.

Desse modo, os vetores $\vec{v}_j$ são paralelos ⑤
à superfície M localmente.

Esses campos $\vec{v}_j$ nos permitem então definir uma malha de coordenadas sobre a superfície M sem nenhuma singularidade (veja a condição (c) da integrabilidade).

Isso implica que a topologia de M é necessariamente aquela de um toro de dimensão n em um espaço de fase 2n dimensional. Para uma prova desse ponto e uma discussão aprofundada, remeto ao livro do Arnold: "Mathematical Methods of Classical Mechanics".



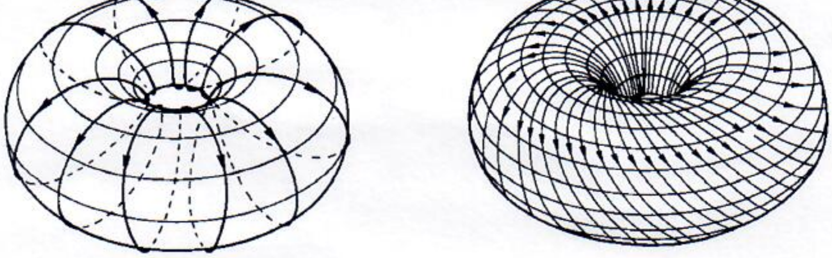
(a) (b) (c)

Quando exigimos que $\vec{v}_j$ seja sempre não-singular, excluímos a esfera por causa dos pólos. Lá, longitude e latitude se confundem!

Ao identificarmos o movimento como restrito a um toro temos várias consequências interessantes. Uma delas é que agora podemos definir um modo normal não-linear para um sistema integrável. O adjetivo não-linear aqui quer dizer esse é um resultado exato e que nenhuma aproximação de pequenas oscilações foi feito. Esse modo é o movimento periódico ao longo de uma das n direções e possui frequência $\omega_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Se $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ = racional $\Rightarrow$ trajetória fechada

Se $\frac{\omega_i}{\omega_j}$ = irracional $\Rightarrow$ trajetória aberta eventualmente cobrindo todo superfície M



(a) Trajectory closed

(b) Trajectory eventually covers the surface densely

Outra consequência interessante é o fato de um se o movimento é restrito ao toro n-dimensional, o sistema obviamente não explora todo o espaço de fase. Isso viola a hipótese ergódica da Mecânica Estatística. Em princípio, isso parece não ser um problema muito sério, pois sistemas integráveis são especialíssimos. No curso de Mecânica estudamos basicamente sistemas integráveis, pois são os quais podemos resolver analiticamente. Mas sistemas de 3 corpos e o pêndulo duplo não são integráveis

A saída para o dilema da quebra de ergodicidade é dizer que ligeiras perturbações em um sistema destroem sua integrabilidade, o que validaria a hipótese ergódica. Acontece é que a "maioria" dos toros sobrevive a perturbações, embora de forma distorcida. Voltaremos a esse ponto no futuro quando falarmos de teoria de perturbação.

– Oscilador harmônico duplo

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right)$$

$$\equiv H_x + H_y \quad \text{, osciladores desacoplados}$$

Nesse caso, podemos considerar $F_1$ e $F_2$ como qualquer par dentre $H, H_x, H_y$ pois $\{F_i, H\} = 0$.

As frequencias naturais são $\omega_x$ e $\omega_y$. As trajetórias são fechadas apenas quando $\omega_x/\omega_y$ é racional, levando às figuras de Lissajous.

No caso em que $\omega_x = \omega_y = \omega$ temos

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\theta^2/r^2\right) + \frac{1}{2}\omega^2 m r^2$$

força central.

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{J^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}\omega^2 m r^2}_{U(r)}$$

$J$ é conservado.
$\theta$ é cíclica.

• $U'(r) = 0$ (mínimo $r=a$)

$$-\frac{J^2}{ma^3} + m a\omega^2 = 0$$

$$-ma\dot{\theta}^2 + ma\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \omega \equiv \omega_\theta$$

• $\omega_r = \sqrt{\frac{U''(a)}{m}}$

$$\omega_r = \sqrt{\underbrace{\frac{3J^2}{m^2a^4}}_{3m\omega^2} + \omega^2}$$

$$\omega_r = 2\omega = 2\omega_\theta \checkmark$$

Órbita fechada.