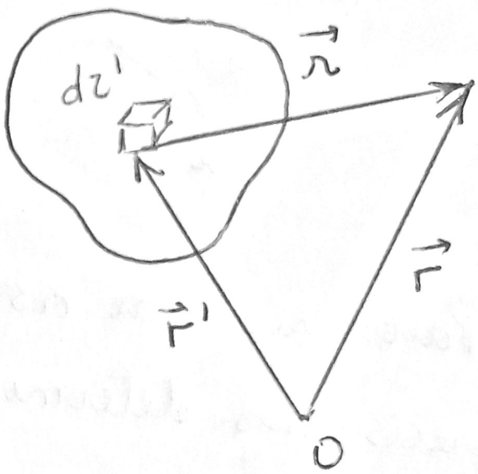
Potenciais de Liénard - Wiechert

Vimos nas aulas anteriores que, no calibre de Lorentz, os potenciais escalar e vetor podem ser escritos como

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$



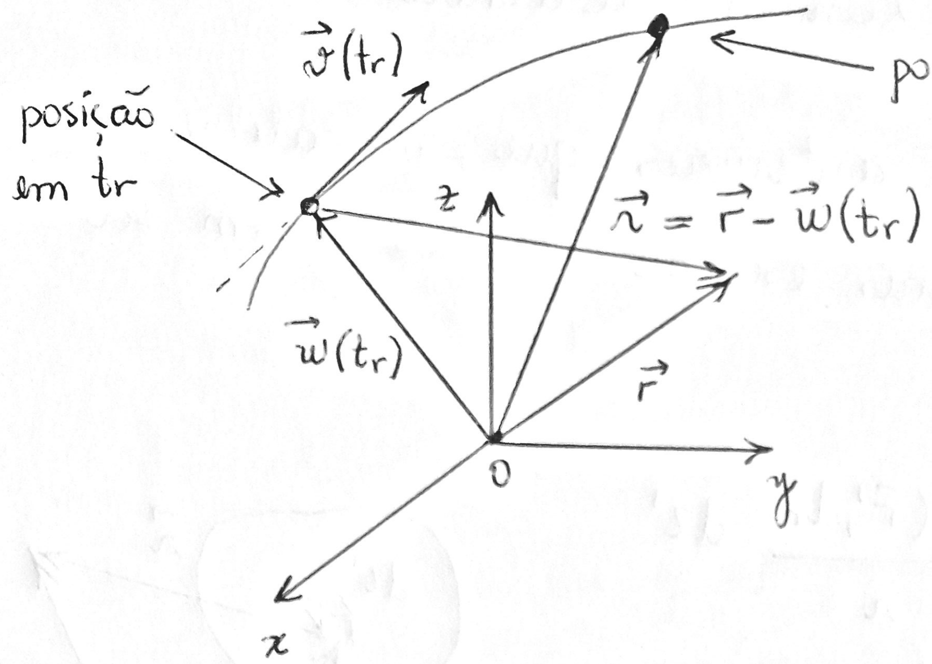
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{\mathscr{r}}\,d\tau'$$

onde t_r é o tempo retardado

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

A dependência de V e $\vec{A}$ com o tempo t_r expressa a velocidade finita com que qualquer sinal eletromagnético se propaga.

Aplicaremos as expressões acima para o caso particular e de grande interesse, de uma carga pontual em movimento.



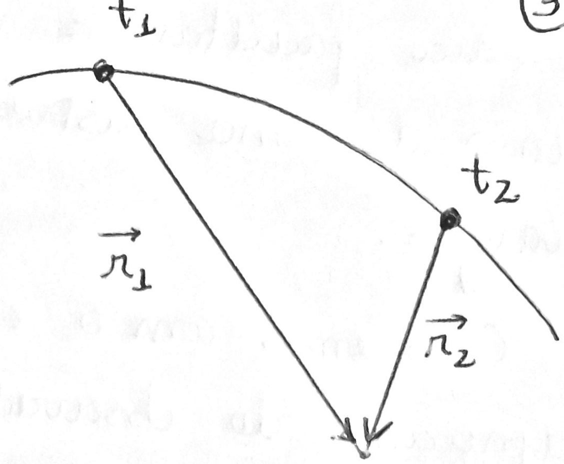
Para realizar as integrações de maneira explícita, precisamos determinar t_r p/ cada par $(\vec{r}, t)$. A eq. para determinar t_r é

$$|\vec{\mathscr{r}}| = |\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r) \qquad (*)$$

Essa equação tem no máximo uma solução, uma vez que, de acordo com a teoria da Relatividade Restrita, nenhuma partícula de massa finita pode se mover mais rápido que a luz no vácuo.

Suponha, por absurdo, que existam 2 pontos sobre a trajetória $\vec{w}(t)$ da partícula com tempos retardados t_1 e t_2, cujos sinais eletromagnéticos chegam em $\vec{r}$ ao mesmo tempo e, portanto, satisfazem $(*)$.

Então ③



$$r_1 = c(t - t_1) \quad e \quad r_2 = c(t - t_2)$$

$$\Downarrow$$

$$r_1 - r_2 = c(t_2 - t_1)$$

$$\Downarrow$$

Velocidade média de q ao ponto $\vec{r}$ ao longo da direção $\hat{r}$ é c. (IMPOSSÍVEL!)

Tomemos o potencial retardado $V(\vec{r},t)$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{r}\,d\tau' \xrightarrow[\text{pontual}]{\text{carga}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\int \rho(\vec{r}\,',t)\,d\tau'$$

posição retardada da carga

Mas atenção:

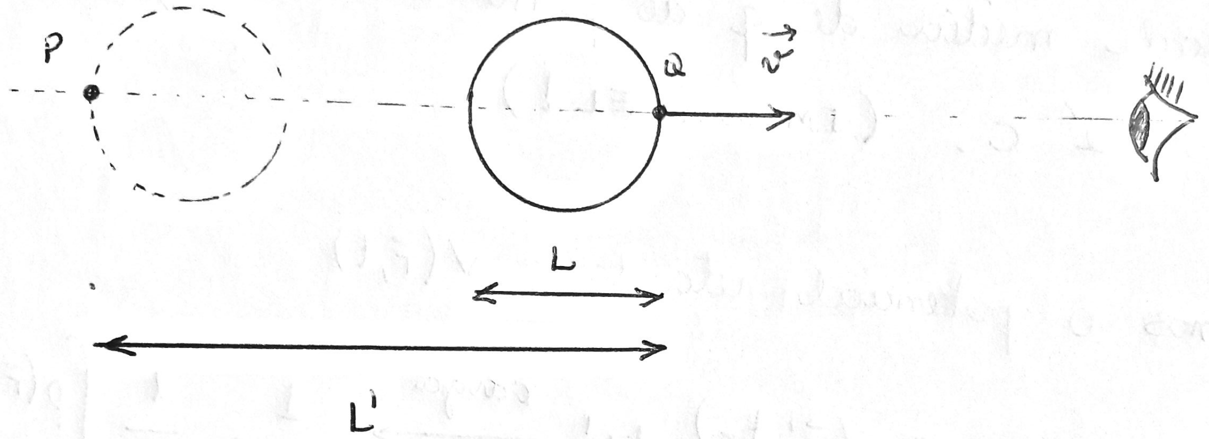
$$\underbrace{\int \rho(\vec{r}\,',t_r)\,d\tau'}\ \neq q$$

como o instante t e a posição $\vec{r}$ estão fixos, a contribuição $\rho(\vec{r}\,',t_r)\,d\tau'$ envolve a densidade em diferentes instantes t_r ao longo da integração!

Mesmo no caso de uma partícula pontual.

Para facilitar a visualização do efeito, tomemos o caso de uma distribuição espacialmente estendida de cargas.

Comecemos com o caso em que essa distribuição se aproxima do observador com velocidade $\vec{v}$



Os pontos P e Q e seus tempos retardados foram escolhidos de forma que seus sinais eletromagnéticos atinjam o observador no mesmo instante t.

P $\longrightarrow$ instante retardado t_P

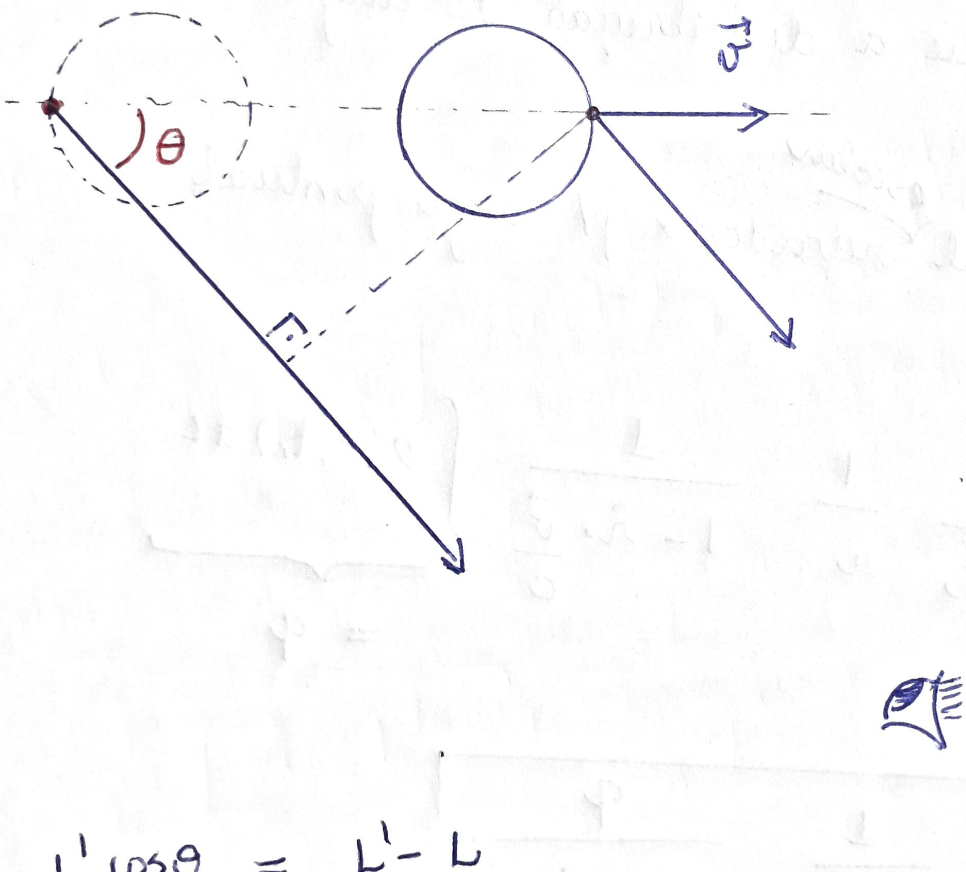
Q $\longrightarrow$ " " t_Q

Para isso, no instante t_Q, o sinal eletromagnético emitido por P em t_P deve estar passando exatamente por Q. Portanto

$$\frac{L'}{c} = \frac{L'-L}{v} \Rightarrow L' = \frac{L}{1-v/c}$$

É importante notar que a expressão anterior não tem nada a ver com o conceito de contração de Lorentz. Não estamos comparando comprimentos em referenciais diferentes.

Se agora a velocidade $\vec{v}$ faz um ângulo θ com a linha de visada



$$\frac{L' \cos\theta}{c} = \frac{L' - L}{v}$$

$$\Downarrow$$

$$L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \Rightarrow L' = \frac{L}{1 - \frac{\hat{r}\cdot\vec{v}}{c}}$$

Ou seja, a integração sobre a densidade de carga se estende por uma distância $L' \neq L$ e, portanto, altera o elemento de volume

$$dz' = \frac{dz}{1 - \hat{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}}$$

Perceba que o fator $\left(1 - \hat{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)^{-1}$ sobrevive mesmo no limite em que a distribuição de carga tende a um ponto!

Logo, o potencial escalar retardado p/ carga pontual em movimento fica

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \hat{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}} \underbrace{\int \rho(\vec{r}', t_r)\, dz}_{= q}$$

Então

$$\boxed{V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r - \vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}}}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade de q no instante t_r

Já para o potencial vetor podemos escrever a densidade de corrente como

$$\vec{J}(\vec{r}', t_r) = \rho(\vec{r}', t_r)\,\vec{v}(t_r)$$

de forma que

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\text{ᴙ}}\, d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)\,\vec{v}(t_r)}{\text{ᴙ}}\, d\tau'$$

$$\xrightarrow[\text{pontual}]{\text{carga}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}}{\text{ᴙ}}\int \rho(\vec{r}', t_r)\, d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}}{\text{ᴙ}}\frac{1}{1 - \hat{\text{ᴙ}}\cdot\frac{\vec{v}}{c}}\int \rho(\vec{r}', t_r)\, d\tau'$$

Resumindo

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{v}\,\dfrac{q}{\text{ᴙ} - \vec{\text{ᴙ}}\cdot\frac{\vec{v}}{c}} = \dfrac{\vec{v}}{c^2}\,V(\vec{r}, t) \\[2em] V(\vec{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{q}{\text{ᴙ} - \vec{\text{ᴙ}}\cdot\frac{\vec{v}}{c}} \end{cases}$$

Potenciais de Liénard-Wiechert

Caso especial: carga pontual com velocidade constante $\vec{v}$

As expressões anteriores ainda envolvem implicitamente o tempo retardado t_r

Sem perda de generalidade, assumamos que a carga passa pela origem em $t=0$:

$$\vec{w}(t) = \vec{v}\, t$$

O tempo retardado satisfaz

$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r)$$

Logo

$$r^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{v}\, t_r + v^2 t_r^2 = c^2 (t^2 - 2 t\, t_r + t_r^2)$$

$$(c^2 - v^2) t_r^2 + 2(\vec{r}\cdot\vec{v} - c^2 t) t_r + c^2 t^2 - r^2 = 0$$

$$\Delta = 4(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 - 4(c^2 - v^2)(c^2 t^2 - r^2)$$

$$t_r = \frac{c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v} \pm \left[(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)\right]^{1/2}}{c^2 - v^2}$$

Apenas uma solução é física.

No limite $\vec{v} = \vec{0}$ (partícula parada na origem)

$$t_r = t \pm \frac{\left[c^4t^2 + c^2r^2 - c^4t^2\right]^{1/2}}{c^2} = t \pm \frac{r}{c}$$

$\Downarrow$

$t_r = t - r/c$

sinal negativo

(causalidade!)

voltemos ao potencial $V(\vec{r}, t)$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r}\left(1 - \hat{\mathscr{r}} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)}$$

$$\mathscr{r}\left(1 - \hat{\mathscr{r}} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right) = c(t - t_r)\left[1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{v}t_r)}{c(t - t_r)}\right]$$

$$= c(t - t_r) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} + \frac{v^2}{c} t_r$$

$$= \frac{1}{c}\left[c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v} - (c^2 - v^2)t_r\right]$$

$$= \frac{1}{c}\left[(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)\right]^{1/2}$$

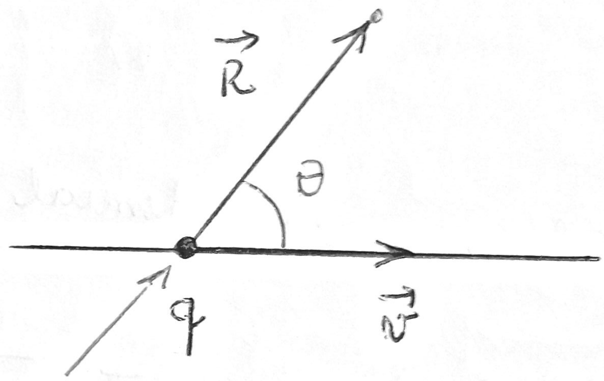
Logo, p/ $\vec{v}$ constante:

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\left[(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)\right]^{1/2}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r},t)$$

O resultado anterior pode ser escrito em forma mais compacta definindo-se o vetor

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t \neq \vec{r}$$



posição atual (t) da carga

Para a geometria acima, temos

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2 v^2}$$

onde

$$R^2 = (\vec{r} - \vec{v}t)^2 = r^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{v}\,t + v^2t^2$$

$$\vec{R}\cdot\vec{v} = (\vec{r} - \vec{v}t)\cdot\vec{v} = \vec{r}\cdot\vec{v} - v^2 t$$

Então

$$1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta = 1-\frac{v^2}{c^2}\left[1-\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2v^2}\right]$$

$$= 1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2c^2} = \frac{R^2(c^2-v^2)+(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2c^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = (r^2+v^2t^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t)(c^2-v^2)+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2+v^4t^2-2(\vec{r}\cdot\vec{v})v^2t$$

$$= r^2c^2-r^2v^2+c^2v^2t^2-\cancel{v^4t^2}-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}+\cancel{2(\vec{r}\cdot\vec{v})v^2t}$$

$$+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2+\cancel{v^4t^2}-\cancel{2(\vec{r}\cdot\vec{v})v^2t}$$

$$= (\vec{r}\cdot\vec{v})^2+c^2(v^2t^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t)-v^2r^2$$

$$= R^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

Mas a raiz aparecendo no denominador de $V(\vec{r},t)$

é igual a $\sqrt{\alpha}$

$$\left[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\right]^{1/2}$$

$$= (\vec{r}\cdot\vec{v})^2+c^2(v^2t^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t)-v^2r^2$$

$$\Downarrow$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right]^{1/2}} \xrightarrow[\text{limite estático}]{v\ll c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Campo eletromagnético associado

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\imath c - \vec{\imath} \cdot \vec{v})}$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(\imath c - \vec{\imath} \cdot \vec{v})^2} \vec{\nabla}(\imath c - \vec{\imath} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{+1}{(\imath c - \vec{\imath} \cdot \vec{v})^2} \left[-c \vec{\nabla} \imath + \vec{\nabla}(\vec{\imath} \cdot \vec{v}) \right]$$

$$\imath = c(t - t_r) \Rightarrow \vec{\nabla} \imath = -c \vec{\nabla} t_r$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\imath} \cdot \vec{v}) = (\vec{\imath} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\imath} + \vec{\imath} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\imath})$$

$$(\vec{\imath} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(\imath_x \frac{\partial}{\partial x} + \imath_y \frac{\partial}{\partial y} + \imath_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}(t_r)$$

$$= \imath_x \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt_r}}_{= \vec{a}} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \imath_y \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \imath_z \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

$$= \vec{a} (\vec{\imath} \cdot \vec{\nabla} t_r)$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathscr{r}} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})(\vec{r}-\vec{w}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})$$

$$= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = \vec{v}$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{w}$$

$$= v_x \underbrace{\frac{d\vec{w}}{dt_r}}_{=\vec{v}}\frac{\partial t_r}{\partial x} + v_y\frac{d\vec{w}}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} + v_z\frac{d\vec{w}}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}$$

$$= \vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}t_r)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}v_x - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}v_y - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{dv_z}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)}_{=-(\vec{a}\times\vec{\nabla}t_r)_x}\hat{x} + \dots$$

$$= -\vec{a}\times\vec{\nabla}t_r$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\imath} = \vec{\nabla}\times(\vec{r}-\vec{w}) = \cancelto{0}{\vec{\nabla}\times\vec{r}} - \vec{\nabla}\times\vec{w}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(\frac{dw_z}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dw_y}{dt_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\right)}_{= -(\vec{v}\times\vec{\nabla}t_r)_x}\hat{x} + \cdots$$

$$= -\vec{v}\times\vec{\nabla}t_r$$

Logo, coletando todos os termos, temos

$$\vec{\nabla}(\vec{\imath}\cdot\vec{v}) = \vec{a}\cdot(\vec{\imath}\cdot\vec{\nabla}t_r) + \vec{v} - \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}t_r)$$

$$\boxed{-\vec{\imath}\times(\vec{a}\times\vec{\nabla}t_r)} + \boxed{\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{\nabla}t_r)}$$

$$\downarrow \quad \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$= \cancel{\vec{a}\cdot(\vec{\imath}\cdot\vec{\nabla}t_r)} + \vec{v} - \cancel{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}t_r)}$$

$$\boxed{-\cancel{\vec{a}(\vec{\imath}\cdot\vec{\nabla}t_r)} + \vec{\nabla}t_r(\vec{\imath}\cdot\vec{a})}$$

$$\boxed{+\cancel{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}t_r)} - \vec{\nabla}t_r(v^2)}$$

$$= \vec{v} + (\vec{\imath}\cdot\vec{a} - v^2)\vec{\nabla}t_r$$

Logo, até agora temos

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v})^2}\left[\vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{a})\vec{\nabla} t_r\right]$$

Calculemos explicitamente $\vec{\nabla} t_r$

$$t_r = t - \frac{\mathscr{r}}{c} \Rightarrow \vec{\nabla} t_r = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\mathscr{r}$$

$$\vec{\nabla}\mathscr{r} = \vec{\nabla}(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathscr{r}})^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathscr{r}})^{1/2}}\vec{\nabla}(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathscr{r}})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathscr{r}}\vec{\nabla}(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\mathscr{r}})$$

$$= \frac{1}{\mathscr{r}}\left[(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathscr{r}} + \vec{\mathscr{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\mathscr{r}})\right]$$

$$(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathscr{r}} = (\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{w}$$

De maneira muito similar ao procedimento anterior

$$(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{\mathscr{r}} \quad \text{e} \quad (\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{w} = \vec{v}(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla} t_r)$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{\mathscr{r}} = \vec{\mathscr{r}} - \vec{v}(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla} t_r)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathscr{r}} = \vec{v}\times\vec{\nabla} t_r$$

Então

$$\vec{\nabla} t_r = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\mathscr{r} = -\frac{1}{c}\,\frac{1}{\mathscr{r}}\left[\vec{\mathscr{r}} - \vec{v}\left(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla} t_r\right) + \vec{\mathscr{r}}\times\left(\vec{v}\times\vec{\nabla} t_r\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{c}\,\frac{1}{\mathscr{r}}\left[\vec{\mathscr{r}} - \vec{v}\,\cancel{\left(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla} t_r\right)} + \vec{v}\,\cancel{\left(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{\nabla} t_r\right)} - \vec{\nabla} t_r\left(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

e

$$\left(1 - \frac{\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}{c\mathscr{r}}\right)\vec{\nabla} t_r = -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{c} \Rightarrow \vec{\nabla} t_r = \frac{-\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}}$$

Portanto

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qc}{\left(\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}\right)^3}\left[\left(\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}\right)\vec{v} - \left(c^2 - v^2 - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{a}\right)\vec{\mathscr{r}}\right]$$

Mostre que, por sua vez

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qc}{\left(\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}\right)^3}\left[\left(\mathscr{r}c - \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{v}\right)\left(-\vec{v} + \frac{\mathscr{r}\vec{a}}{c}\right) + \frac{\mathscr{r}}{c}\left(c^2 - v^2 + \vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{a}\right)\vec{v}\right]$$

e, portanto, definindo

$$\vec{u} \equiv c\hat{\mathscr{r}} - \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\mathscr{r}}{\left(\vec{\mathscr{r}}\cdot\vec{u}\right)^3}\left[\left(c^2 - v^2\right)\vec{u} + \vec{\mathscr{r}}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]}$$

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3} (c^2 - v^2)\vec{u}}_{\text{campo de Coulomb generalizado ou " " velocidade}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3} \vec{r}\times(\vec{u}\times\vec{a})}_{\text{campo de radiação ou " de aceleração}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_{a}$$

$$|\vec{E}_v| \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \Rightarrow |\vec{E}_v|^2 \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^4}$$

$$|\vec{E}_a| \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r} \Rightarrow |\vec{E}_a|^2 \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{v}}{c^2} V \right) = \frac{1}{c^2} \left[V \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{= -\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r} - \vec{v} \times \vec{\nabla} V \right]$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{u} \cdot \vec{r})^3} \vec{r} \times \left[(c^2 - v^2)\vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{a} \right]$$

Como $\vec{u} = c\hat{r} - \vec{v}$

$$\vec{r} \times \vec{u} = -\vec{r} \times \vec{v}$$

logo

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{u} \cdot \vec{r})^3} \hat{r} \times \left[(c^2 - v^2)\vec{u} + (\vec{r} \cdot \vec{a}) u - (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{a} \right]}$$

Portanto

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{r} \times \vec{E}}$$

caso especial de velocidade cte $(\vec{a} = \vec{0})$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2) r \vec{u}}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3}$$

$$\vec{u} = c\hat{\imath} - \vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\imath\vec{u} = c\imath - \imath\vec{v} = c(t-t_r) - c(t-t_r)\vec{v} = c(\vec{r}-\vec{v}t)$$
$$= c\vec{R}$$

Além disso

$$\vec{\imath}\cdot\vec{u} = \vec{\imath}\cdot(c\hat{\imath}-\vec{v}) = \imath c - \vec{\imath}\cdot\vec{v}$$

$$= \left[(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\right]^{1/2}$$

$$= Rc\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right]^{1/2}$$

Então

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(c^2-v^2)\,c\vec{R}}{R^3c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{1/2}}$$

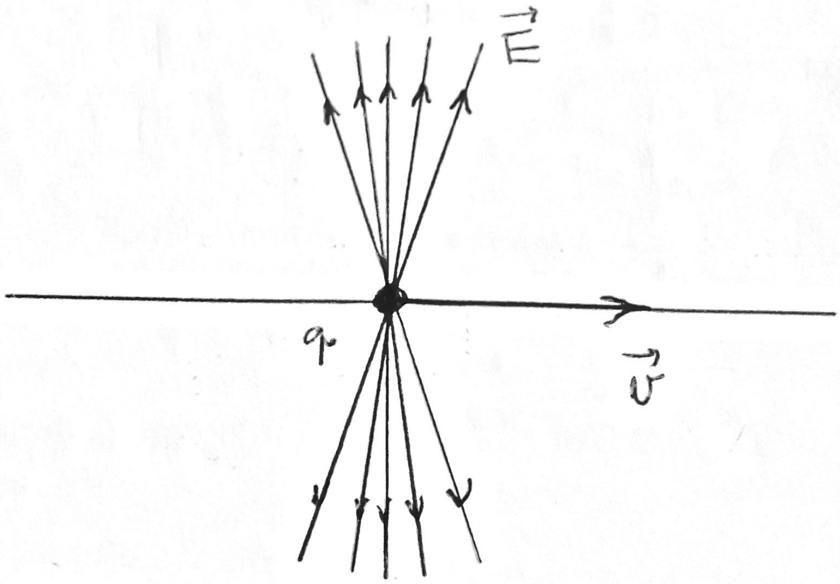
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\hat{R}}{R^2}}$$

O campo continua radial a partir da posição atual da carga, apesar do sinal eletromagnético ter se originado na posição retardada!

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{R^2} \xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R^2}$$

$$\vec{E}(\theta = \pm\pi) = \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= 1/\gamma^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\vec{E}_{repouso}}{\gamma^2}$$

$$\vec{E}(\theta = \pm\pi/2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{R}}{R^2} = \gamma\, \vec{E}_{repouso}$$



linhas de campo tendem a se acumular no plano transversal a $\vec{v}$.

Esboce a linhas de campo magnético.