MAT0130 - Equações Diferenciais I

2a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2020

1 - Determine se o par de funções dado é linearmente independente ou linearmente dependente:
(a) $f(t) = t^2, \quad g(t) = t^2 - 5t$
(b) $f(x) = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \quad e^{\lambda t}\mathrm{sen}\,(\mu t), \quad \mu \neq 0$
(c) $f(x) = e^{3x}, \quad e^{3(x-1)}$
(d) $f(x) = x^3, \quad f(x) = |x|^3$

2 - Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções da equação diferencial $t^2y - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução da equação.

3 - Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy" + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2t^{1/2}$ não é, em geral. Explique por que isto não contradiz o princípio da superposição.

4 - A função $y = sen(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y" + py' + qy = 0$, com coeficientes constantes em um intervalo contendo $t = 0$? Explique sua resposta.

5 - Encontre o Wronskiano do par de funções dado:
a) $e^{2t}, \quad e^{3t/2}$ b) $\cos t, \quad \mathrm{sen}\, t$
c) $e^{-2t}, \quad te^{-2t}$ d) $\cos^2 t, \quad 1 + \cos 2t$

6 - O Wronskiano de duas funções é $W(t) = t\mathrm{sen}\,^2 t$. As funções podem ser linearmente dependentea?

7 - Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y''+p(t)y'+q(t)y = 0$, mostre que as funções $y_3 = y_1+y_2$ e $y_4 = y_1-y_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções. Reciprocamente Se y_3 e y_4 são soluções linearmente independentes, mostre que as funções y_1 e y_2 formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

8 - Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, determine sob que condições as funções $y_3 = ay_1 + by_2$ e $y_4 = cy_1 + dy_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

9 - Mostre que se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

10 - Mostre que se y_1 e y_2 atingem máximo ou mínimo no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

11 - Mostre que as funções $f(t) = t^3$ e $g(t) = t^2|t|$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$, mas não são linearmente dependentes em $-1 < t < 1$. Embora f e g sejam linearmente independentes neste intervalo, Mostre que $W(f, g)$ é nulo neste intervalo. f e g podem ser soluções de uma equação linear de segunda ordem com coeficientes contínuos em $-1 < t < 1$?.