

# EX. 3.13 (SLOTINE): CICLO LIMITE ATRATIVO

Diego Carneiro

Lucas Jonys

# OBJETIVOS DO EXERCÍCIO

- Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \quad (2)$$

- Estudar a estabilidade de outras estruturas de equilíbrio diferentes de pontos de equilíbrios

1- OBTENHA A DERIVADA  $\dot{V}$  E CALCULE  
O CONJUNTO  $E = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$

# SISTEMA E PONTOS DE EQUILÍBRIO

- Nos pontos de equilíbrio não temos variação temporal das variáveis de estado  $\longrightarrow \dot{x} = f(x, u) = 0$ . Igualando (1) e (2) a zero, pode-se obter:

$$x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) = 0$$

$$x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) = 0$$

- Isolando o termo  $(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)$  em uma das equações e substituindo na outra, obtém-se:  $(x_1^{10} + 3x_2^6 = 0)$ . Portanto:

$$x_1 = x_2 = 0$$

A origem é o único ponto de equilíbrio!

# ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ORIGEM

- Será feita a linearização pelo 1º Método de Lyapunov

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \longrightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

- As matrizes A e B são dadas por:  $A = \frac{\partial f(x_{eq}, u_{eq})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_{eq}, u_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_{eq}, u_{eq})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_{eq}, u_{eq})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_{eq}, u_{eq})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

- Para o sistema  $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \\ x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \end{bmatrix}$  teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ORIGEM

Resumo da classificação dos pontos fixos em 2 dimensões (estabilidade linear).

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	<b>CASOS DEGENERADOS (elípticos)</b>			
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

# CANDIDATA LYAPUNOV E O CONJUNTO $E$

- Seja a seguinte função candidata Lyapunov (função de energia):

$$V(x) = (x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2 \quad (3)$$

Observe que mesmo  $V(0)$  sendo diferente de 0, a função de energia é válida para o problema, por ser uma extensão!

- O conjunto  $E$  pode ser calculado pela relação

$$E = \{x | \dot{V}(x) = 0\} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

- Resolvendo a expressão de (4):  $\dot{V}(x) = 2(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)(4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2) = 0$  Substituindo  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  de (1) e (2):

$$\dot{V}(x) = -8(x_1^{10} + 3x_2^6)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10)^2 = 0 \quad (5)$$

# CANDIDATA LYAPUNOV E O CONJUNTO $E$

- O conjunto  $E$  será, portanto, definido quando (5) for nula: 
$$\begin{cases} x_1^{10} + 3x_2^6 = 0 \\ x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0 \end{cases}$$
- Portanto, o conjunto  $E$  é definido pelos pontos  $(x_1, x_2) = (0,0)$  (origem) e pelo conjunto  $F = \{(x_1, x_2) \in R \mid x_2 = \pm \sqrt{\frac{10-x_1^4}{2}}, |x_1| \leq 10^{\frac{1}{4}}\}$ , que representa a elipse  $x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$ .
- As definições a seguir irão nos auxiliar nas próximas análises:
- **Definição I:** Um sistema qualquer  $\dot{x} = f(x, t)$  é dito autônomo se  $f$  não depende explicitamente do tempo, podendo ser reescrito na forma  $\dot{x} = f(x)$ , como no sistema deste exemplo.
- **Definição II:** Um conjunto  $G$  é dito invariante se toda trajetória do sistema que começa em um ponto pertencente ao conjunto permanece nele para tempos futuros. Assim, para um sistema autônomo, qualquer uma das trajetórias no espaço de estado é um conjunto invariante.



2- VERIFICAR QUE O CONJUNTO  $E$   
FORMADO PELA UNIÃO DA ORIGEM COM  
O CICLO LIMITE DADO POR  $x_1^4 + 2x_2^2 -$   
10 É INVARIANTE

# CANDIDATA LYAPUNOV E O CONJUNTO $E$

- O conjunto  $G: x_1^4 + 2x_2^2 = 10$  é invariante, uma vez que sua derivada em relação ao tempo é nula dentro do próprio conjunto:

$$G: x_1^4 + 2x_2^2 = 10 \longrightarrow \dot{G} = -(4x_1^3 + 12x_2^2)(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) = 0$$

**G: Ciclo Limite**

- Portanto, analisando (1) e (2), o sistema pode ser descrito de forma equivalente por

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 \quad (7)$$

- Fazendo a substituição usando coordenadas polares  $\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = (-r^3 \cos^3 \theta - r \cos \theta) \sin \theta \\ \dot{\theta} = -(\sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta) \end{cases}$

- Pode-se perceber que o conjunto invariante tem um ciclo limite no qual o vetor de estado se move no sentido horário.

Há dinâmica das trajetórias no ciclo limite!

# ANÁLISE DO CICLO LIMITE NO SOFTWARE MÁXIMA

```
wxMaxima 13.04.2 [ maximaEX13.3.wxm* ]
Arquivo Editar Célula Maxima Equações Álgebra Cálculo Simplificar Gráfico Numérico Ajuda

(%i3) f1: y$
      f2: -x^3$
      solve([f1,f2]);
(%o5) [[x=0,y=0]]

(%i6) depends([x,y],t)$

(%i7) eq1: diff(x,t) = f1;
(%o7)  $\frac{d}{dt}x=y$ 

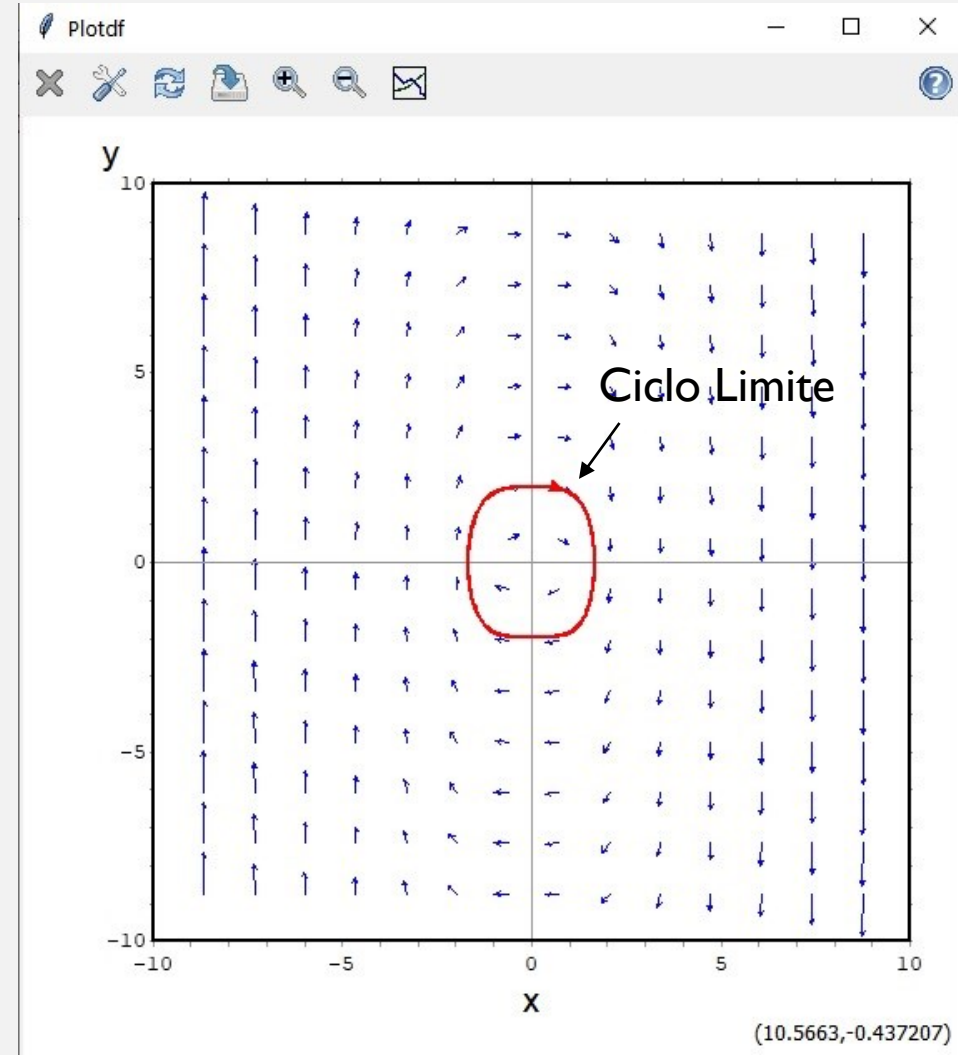
(%i8) eq2: diff(y,t) = f2;
(%o8)  $\frac{d}{dt}y=-x^3$ 

(%i9) depends([r,u],t)$

(%i10) eq3: ev(eq1, x=r*cos(u), y=r*sin(u), diff)$
(%i11) eq4: ev(eq2, x=r*cos(u), y=r*sin(u), diff)$

(%i12) solve([eq3,eq4],[diff(r,t),diff(u,t)]);
(%o12) [[ $\frac{d}{dt}r = -\frac{(r^3 \cos(u)^3 - r \cos(u)) \sin(u)}{\sin(u)^2 + \cos(u)^2}$ ,  $\frac{d}{dt}u = -\frac{\sin(u)^2 + r^2 \cos(u)^4}{\sin(u)^2 + \cos(u)^2}$ ]]

(%i26) f: [y,-x^3]$
(%i27) vars: [x,y]$
(%i29) plotdf(f, vars, [x,-10,10], [y,-10,10])$
```



## CANDIDATA LYAPUNOV E O CONJUNTO $E$

- A derivada da candidata Lyapunov dada em (3) é estritamente negativa, exceto para  $x_1^4 + 2x_2^2 = 10$  e  $x_1^{10} + 3x_2^6 = 0$ , onde ela é nula. Assim, como o ciclo limite e a origem são conjuntos invariantes, o conjunto  $E$  será a união deles.

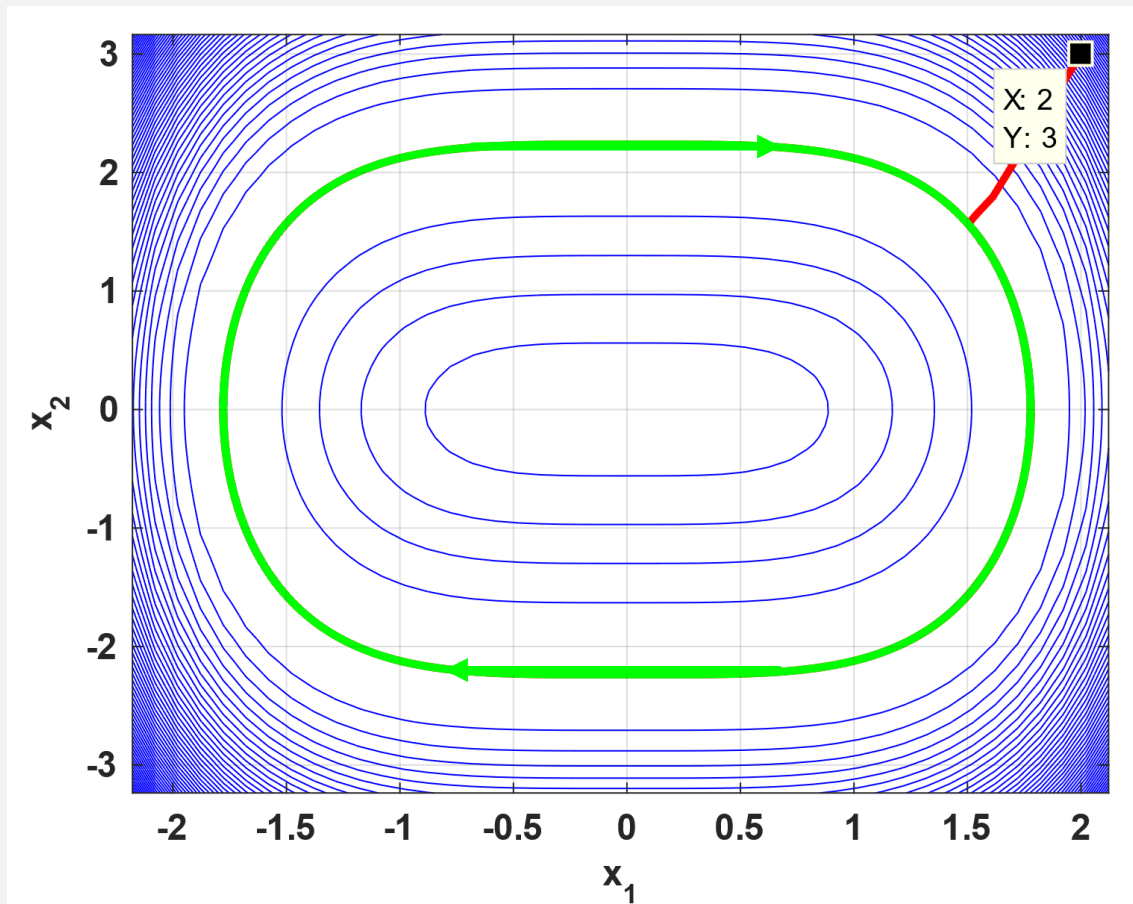
3- DEFINA O CONJUNTO  $\omega_L$  EM TORNO DO CICLO LIMITE E MOSTRAR QUE O CICLO LIMITE É ATRATIVO

# PROVA QUE O CICLO LIMITE É ATRATIVO

- **Teorema de Conjuntos invariantes local:** Seja um sistema autônomo  $\dot{x} = f(x)$  com  $f$  contínua e  $V(x)$  uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Assuma que:
  - (i) Para algum  $l > 0$ , a região  $\omega_L$  definida por  $V(x) < l$  é limitada
  - (ii)  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \omega_L$
- Seja  $R$  o conjunto de todos os pontos dentro de  $\omega_L$  com  $\dot{V}(x) = 0$  e  $E$  o maior conjunto invariante em  $R$ . Então, toda solução originando em  $\omega_L$  tende a  $E$  quando  $t \rightarrow \infty$
- Considere a região  $\{\omega_L \mid V(x) < 100\}$  de forma que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \omega_L$ . Note que a origem não está incluída na região, mas que toda a região delimitada pelo ciclo limite pertence a  $\omega_L$ . Neste caso, portanto, o maior conjunto invariante  $E$  será apenas o ciclo limite. Com isso, qualquer trajetória iniciando na região das vizinhanças do ciclo limite  $\omega_L$ , exceto na origem, converge para o ciclo limite.

# PROVA QUE O CICLO LIMITE É ATRATIVO

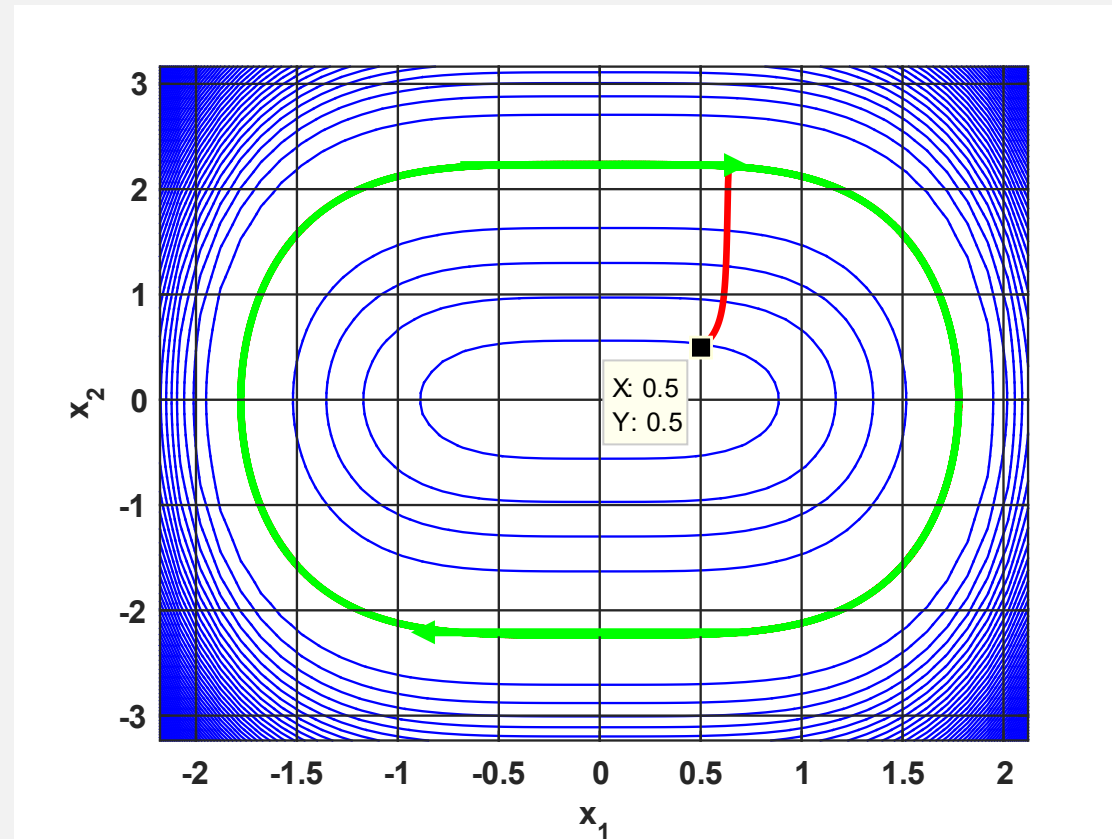
- Definindo uma condição inicial externa à região do ciclo limite, de modo que  $(x_1, x_2) = (2, 3)$ , temos que a trajetória dos estados converge para o ciclo limite, passando por todas as curvas de nível até a elipse que define o ciclo, como pode ser observado na imagem ao lado.
- O ciclo limite está em verde, a trajetória em vermelho e as curvas de nível de  $V(x)$  em azul.
- Se a origem fosse estável, a trajetória iria se aproximar da origem, passando por curvas de nível cada vez menores.
- Uma vez que a trajetória convergiu para o ciclo limite, fica evidente que a origem é um ponto de equilíbrio instável e o ciclo limite é atrativo



Condição inicial externa ao conjunto  $\omega_L$

# PROVA QUE O CICLO LIMITE É ATRATIVO

- De modo análogo, é possível observar para quem uma condição inicial pertencente à região interna do ciclo limite (conjunto  $\omega_L$ ), definida por  $(x_1, x_2) = (0.5, 0.5)$ , a trajetória converge para o ciclo limite.



Condição inicial interna ao conjunto  $\omega_L$



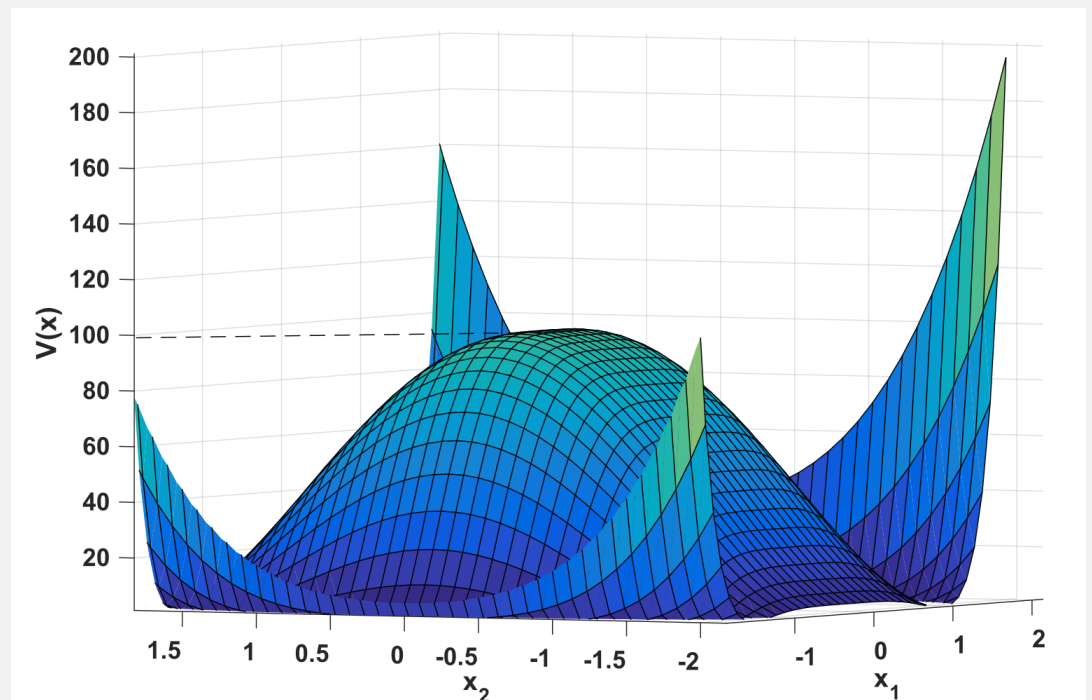
4-PLOTAR  $V(x)$ , CURVAS DE NÍVEL E  $\dot{V}(x)$   
E VERIFICAR O COMPORTAMENTO  
DECRESCENTE DE  $V(x)$  AO LONGO DAS  
TRAJETÓRIAS NA VIZINHANÇA DO CICLO  
LIMITE

# VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DE $V(x)$

- A função de Lyapunov  $V(x)$  pode ser visualizada na imagem ao lado.
- A função possui o valor 100 na origem (0,0) e decresce até a região definida pelo conjunto domínio da elipse  $x_1^4 + 2x_2^2 - 10 = 0$ . ( $V(x) = 0$ )
- Nos valores externos à esse domínio, o comportamento da função Lyapunov é crescente e o valor de  $V(x)$  tende ao infinito com o aumento do valor em módulo das trajetórias.
- Uma vez que a origem não está contida no maior conjunto invariante, esta é um ponto de equilíbrio instável. Tal análise é a única possível, uma vez que a

linearização da origem pelo método do Jacobiano retorna autovalores nulos, tornando inconclusiva a análise de estabilidade por esse método.

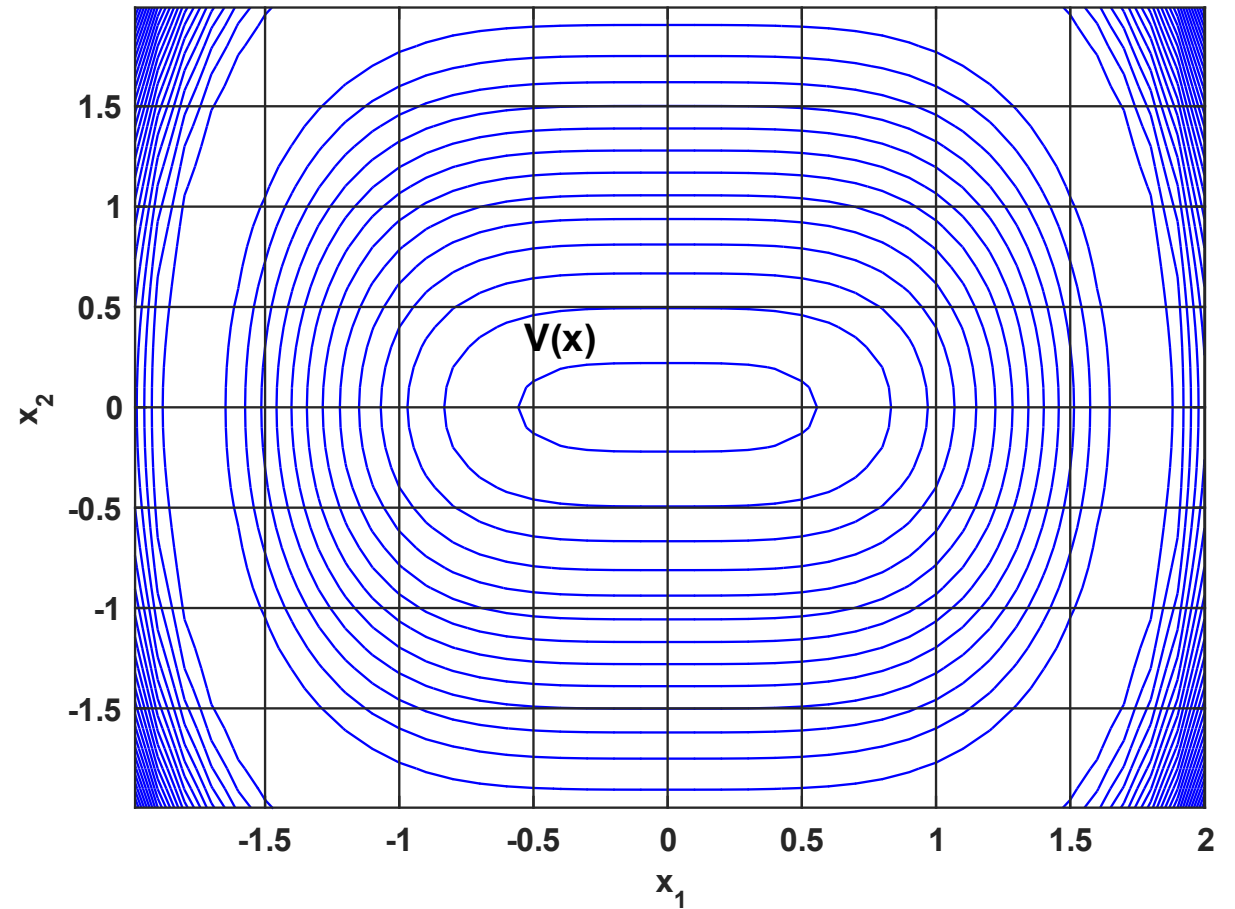
- Como  $V(x)$  representa a energia do sistema, a imagem em três dimensões deixa evidente a instabilidade da origem e o decrescimento da função.



# VISUALIZAÇÃO DAS CURVAS DE NÍVEL

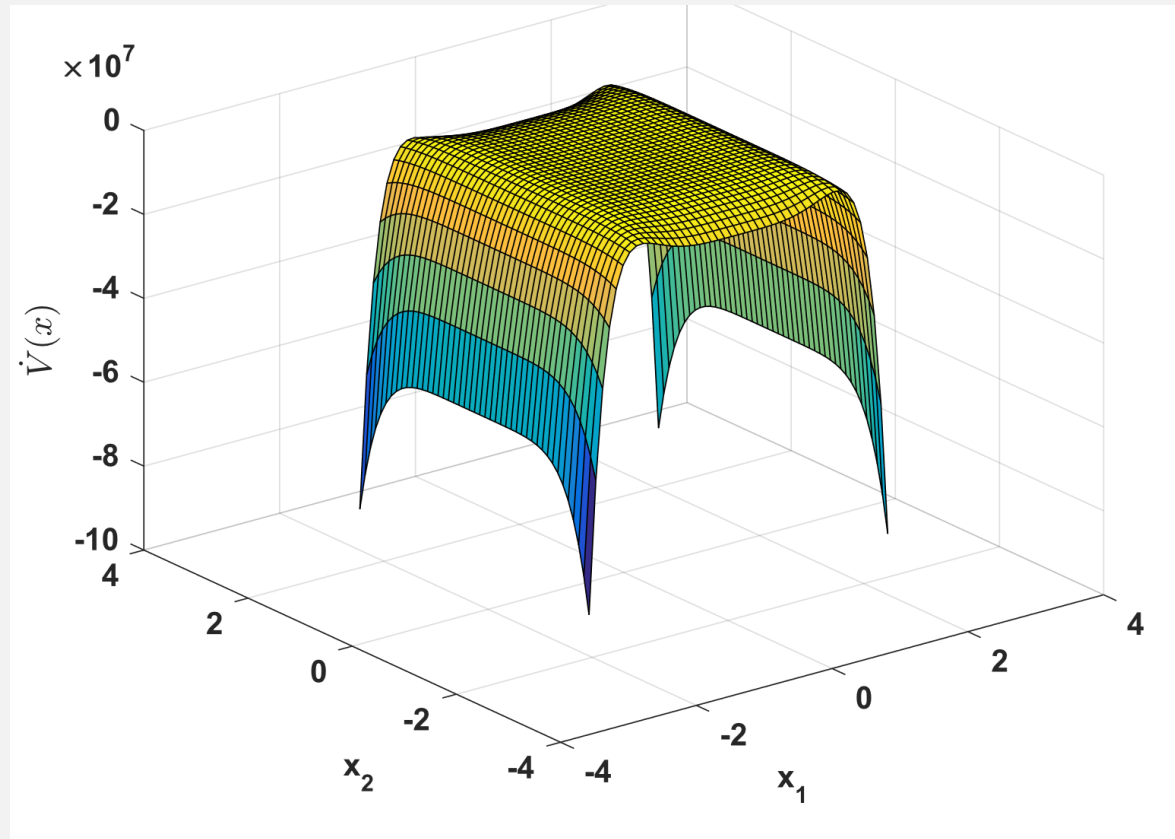
- As curvas de nível podem ser observadas na imagem ao lado. Por meio dessas, é possível verificar que para valores fixos da função de Lyapunov, as curvas obtidas são elipses.
- O tamanho das elipses será em função do valor fixo de  $V$ , atendendo à equação:

- $x_1^4 + 2x_2^2 = 10 \pm \sqrt{V} \rightarrow x_2 = \pm \frac{\sqrt{x_1^4 + 10 \pm \sqrt{V}}}{\sqrt{2}}$



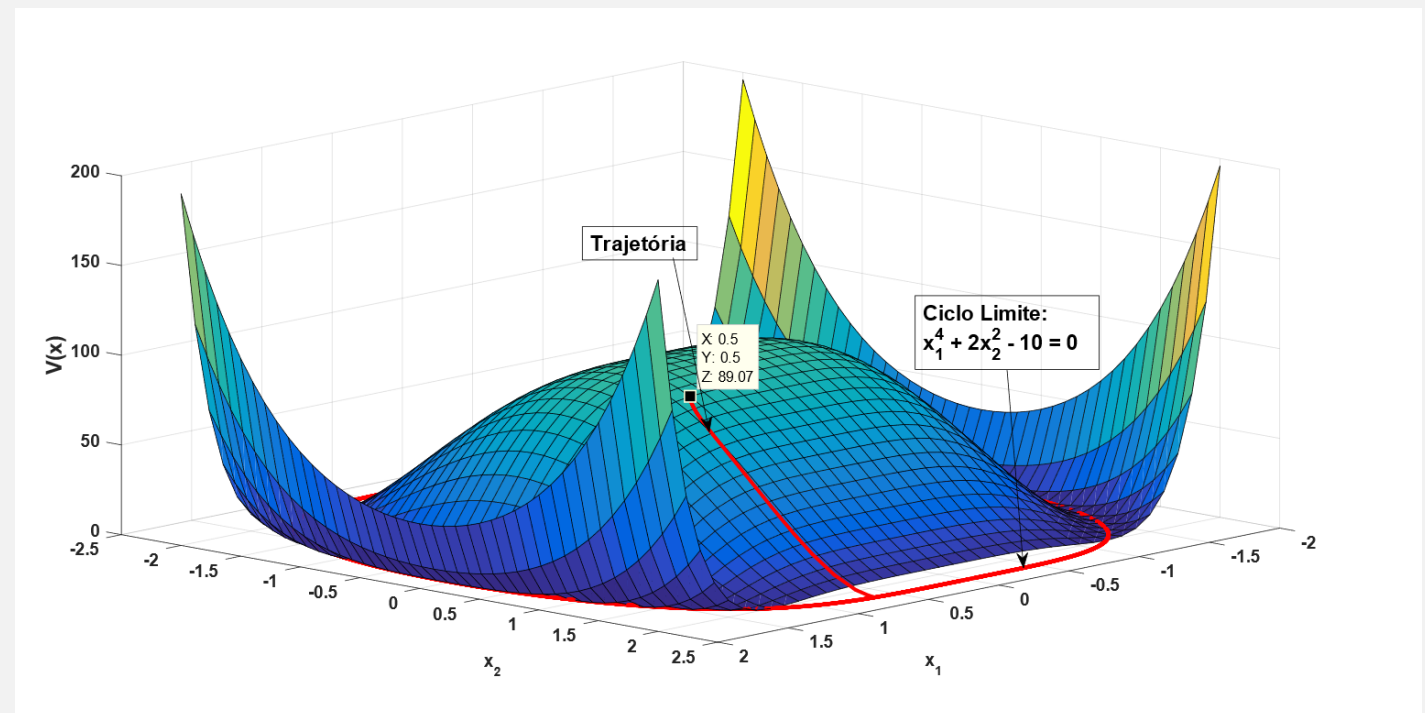
# VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DE $\dot{V}(x)$

- A derivada de  $V(x)$  está representada na figura ao lado.
- $\dot{V}(x)$  pode ser negativa ou nula. Será nula exatamente na elipse que representa ciclo limite e negativa para qualquer outro estado.



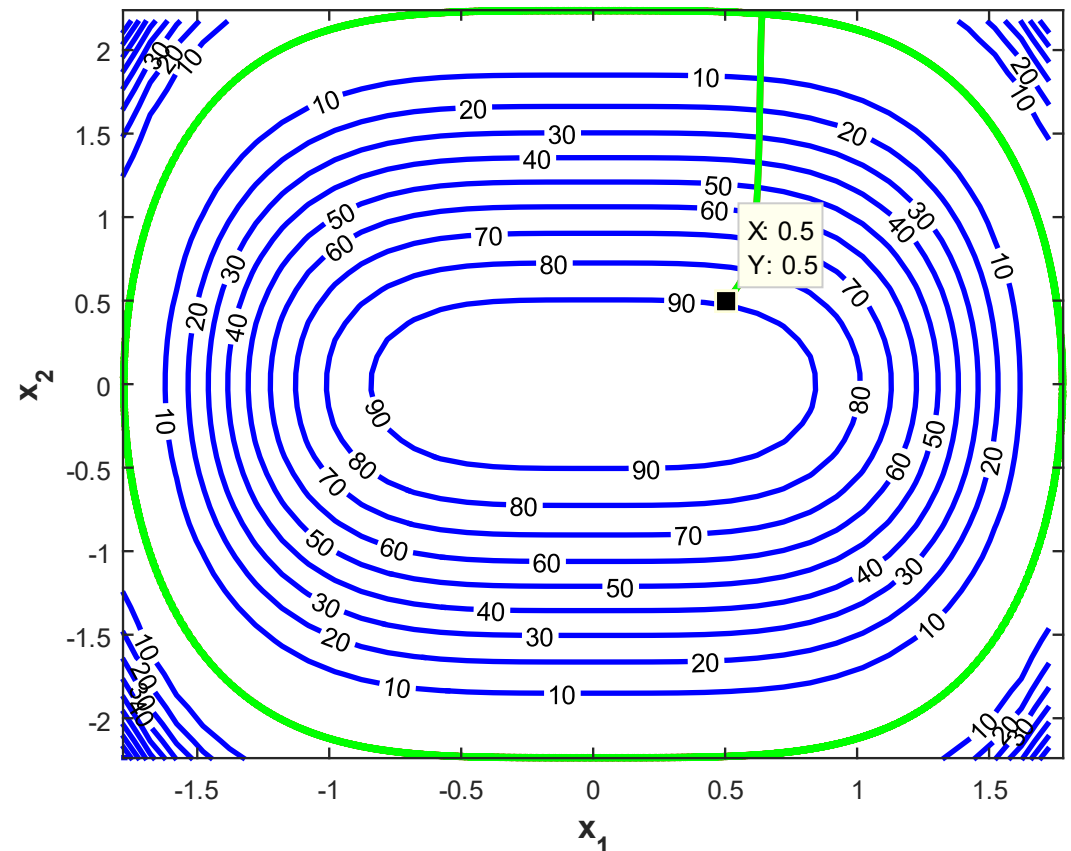
# COMPORTAMENTO DE $V(x)$ NAS VIZINHANÇAS DO CICLO LIMITE

- O comportamento de  $V(x)$  nas vizinhanças do ciclo limite pode ser observado na figura ao lado, que retrata a função de Lyapunov (azul), e o ciclo limite (em vermelho).
- É possível constatar que, à medida que as trajetórias partindo próximas à origem, se aproximam do ciclo limite, há um decaimento de  $V(x)$ , até o valor nulo quando  $V(x)$  coincide com o ciclo limite.
- A função atinge um valor de máximo local na origem.
- Na região externa ao ciclo limite, há um crescimento infinito da função  $V(x)$



# COMPORTAMENTO DE $V(x)$ NAS VIZINHANÇAS DO CICLO LIMITE

- Pelas curvas de nível (em azul), é possível observar que os valores de  $V(x)$  diminuem à medida que afastam-se da origem e aproximam do ciclo limite (em verde).
- As cotas de cada curva estão contidas na imagem ao lado e o valor de  $V(x)$  no ciclo limite é zero e na origem é 100.
- Na região externa ao ciclo limite, o comportamento da função de energia muda, e, portanto, há um crescimento do valor de  $V(x)$  à medida que as trajetórias afastam-se do ciclo limite.



# EXERCÍCIO

- Plotar a resposta no tempo para as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  e calcular a amplitude das oscilações mantidas para:

(a) O sistema descrito pelas equações (1) e (2)

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^7(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 - 3x_2^5(x_1^4 + 2x_2^2 - 10) \quad (2)$$

(a) O sistema equivalente em (6) e (7)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^3 \quad (7)$$

- Considere uma condição inicial fora do ciclo limite