Modelos Probabilísiticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

PTC-3440 - 2020 - Aulas 16-17

EPUSP

Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em $\mathbb{T}$, isto é, para cada $t \in \mathbb{T}$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Por exemplo, poderíamos ter $\mathbb{T} = \{1, 2, ...\}$ ou $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

Ruína do Jogador

Um jogador, a cada instante de tempo, pode ganhar $R\$1,00$ com probabilidade p, ou pode perder $R\$1,00$ com probabilidade $1-p$. Seja $X(t)$, $t \in \mathbb{T} = \{0,1,\ldots\}$ a fortuna do jogador no instante t. Temos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é um processo estocástico que obedece a seguinte equação:

$$X(t+1) = X(t) + U(t+1)$$

onde $U(t) = 1$ com probabilidade p e $U(t) = -1$ com probabilidade $1-p$, e $X(0)$ é a fortuna inicial. Pergunta: Qual é a probabilidade da fortuna do jogador atingir uma determinada meta N antes de quebrar?

Processos de Markov

Vamos supor que $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots\}$ e que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ seja um processo estocástico tomando valores em um conjunto contável $\mathcal{X}$, por exemplo $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ou $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$. Diremos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma cadeia de Markov se

$$P(X(k+1) = j | X(0) = i_0, \ldots, X(k-1) = i_{k-1}, X(k) = i) = p_{ij}.$$

para todos os estados possíveis $i_0, \ldots, i_{k-1}, i, j$ e $k \geq 0$. Devemos ter $p_{ij} \geq 0$ e para todo $i \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{ij} = 1.$$

Processos de Markov

Definimos a matriz de transição $\mathbf{P}$ como sendo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ruína do Jogador

A ruína do jogador com meta de fortuna N é uma cadeia de Markov com $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$ e a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1, \\ p_{ii+1} &= p, \quad p_{ii-1} = 1 - p, \\ p_{NN} &= 1. \end{aligned}$$

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que o mercado financeiro possa a cada dia estar em um dos 3 estados:

1. Estado 0: estável
2. Estado 1: em alta
3. Estado 2: em baixa

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que a cadeia de Markov possua a seguinte matriz de transição $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Em 1 ano qual é proporção do tempo que o mercado fica em cada um dos estados acima?

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que a probabilidade de chover ou não dependa das condições meteorológicas dos 2 dias anteriores. Definimos os estados:

1. Estado 0: choveu hoje e ontem
2. Estado 1: choveu hoje mas não ontem
3. Estado 2: não choveu hoje mas choveu ontem
4. Estado 3: não choveu hoje nem ontem

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que se tenha as seguintes informações após análise estatística:

1. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje e ontem é 0,7
2. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje mas não ontem é 0,5
3. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje mas choveu ontem é 0,4
4. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje nem ontem é 0,2

Modelo de Previsão Meteorológica

Obtemos que a matriz de transição $\mathbf{P}$ é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Caminhada Aleatória

Considere $\mathcal{X} = \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$ e

$$p_{ii+1} = p, \;\; p_{ii-1} = 1 - p.$$

Este processo é conhecido como a caminhada aleatória.

Risco Operacional

Suponha que uma empresa financeira classifique os seus estados de processamento de transações de 0 a 5 de acordo com o tempo necessário para a sua liquidação, segundo o modelo abaixo.

1. Estado 0: transação está sem atraso
2. Estado 1: transação está com 1 dia de atraso
3. Estado 2: transação está com 2 dias de atraso
4. Estado 3: transação está com 3 dias de atraso
5. Estado 4: transação liquidada sem pagamento de multa
6. Estado 5: transação liquidada com pagamento de multa

Risco Operacional

A instituição tem uma série de dados no tempo razoável, e esses dados indicam que a cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição **P** é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a probabilidade de uma transação terminar em um estado com pagamento de multa? Supondo 1000 transações por dia, cada transação envolvendo cerda de $R\$1.000.000,00$ (um milhão), que a multa seja de $0,01\%$ ao dia, e que as transações liquidadas com multa tenham em média 8 dias de atraso, qual é a perda esperada por dia e por mês (22 dias)?

Equações de Chapman-Kolmogorov

Definimos a matriz $\mathbf{P}^{(n)} = [p_{ij}^n]$ onde

$$p_{ij}^n = P(X(n+m) = j | X(m) = i).$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Temos então as equações de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= P(X(n+m) = j | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j, X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j | X(n) = \ell, X(0) = i) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j | X(n) = \ell) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(m) = j | X(0) = \ell) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} p_{i\ell}^{n} p_{\ell j}^{m}
\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$.

Modelo de Previsão Meteorológica

Dado que choveu na 2a e 3a feira, qual é a probabilidade de chover na 5a feira?

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,49 & 0,12 & 0,21 & 0,18 \\ 0,35 & 0,2 & 0,15 & 0,3 \\ 0,2 & 0,12 & 0,2 & 0,48 \\ 0,1 & 0,16 & 0,1 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Resposta: $0,49 + 0,12 = 0,61$.

Estados da cadeia

Os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados de recorrentes e transientes. Um estado i é recorrente se a probabilidade de re-entrar nesse estado começando dele mesmo é 1, transiente caso contrário. Em uma cadeia de Markov finita não se pode ter todos os estados transientes. Uma cadeia de Markov é irredutível se todos os estados se comunicam entre si.

Modelo de Previsão Meteorológica

Todos os estados são recorrentes. Nesse caso diz-se que a cadeia de Markov é ergodica.

Ruína do Jogador

Temos 2 estados recorrentes (na verdade chamados de absorventes), 0 e N, e todos os outros são transientes.

Risco Operacional

Temos 2 estados absorventes, 5 e 6, e todos os outros são transientes.

Probabilidade Limite

O que podemos dizer sobre $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$? Vamos considerar a matriz $\mathbf{P}$ finita e 2 situações.

1o Caso: A matriz $\mathbf{P}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

onde $\mathbf{T}$ contém os estados transientes, e $\mathbf{I}$, a matriz identidade, contém os estados absorventes.

Probabilidade Limite

Efetuando os cálculos obtemos que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^n & \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}^n = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Risco Operacional

Temos que

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Risco Operacional

Segue portanto que

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,9712 & 0,0288 \\ 0,952 & 0,048 \\ 0,92 & 0,08 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Portanto temos que a probabilidade de uma transação terminar em atraso com multa, começando de sem atraso é $2,88\%$, e obviamente de terminar sem multa é de $97,12\%$.

Risco Operacional

A perda esperada para 1 dia é:
Perda esperada em 1 dia
$\cong 1000 \times 0,0288 \times ((1,0001)^8 - 1) \times 10^6 = R\$\,23.000,00.$
Perda esperada em 1 mês (22 dias) $= R\$\,22 \times 23.000,00 \cong R\$\,500.000,00.$

Probabilidade Limite

2o Caso: A cadeia é ergodica. Nesse caso temos que $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$, independente de i. Chamando de π o vetor formado por π_i temos que π é a única solução que satisfaz:

$$\pi' = \pi' \mathbf{P}$$

$$1 = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i.$$

Temos também a seguinte interpretação para π_i. π_i representa a proporção do tempo que a cadeia de Markov permanece no estado i.

Humor do mercado financeiro

Assumindo já as distribuições estacionárias, temos que resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0,5\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,2\pi_2, \\
\pi_1 &= 0,4\pi_0 + 0,4\pi_1 + 0,3\pi_2, \\
\pi_2 &= 0,1\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,5\pi_2, \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2.
\end{aligned}$$

Temos a seguinte solução:

$$\pi_0 = \frac{21}{62} = 33,87\%, \;\; \pi_1 = \frac{23}{62} = 37,1\%, \;\; \pi_2 = \frac{18}{62} = 29,03\%.$$

A ruína do jogador

Qual é a probabilidade do jogador atingir a fortuna N antes de quebrar, dado que começou com i ? Poderíamos resolver esse problema usando a fórmula do Caso 1 visto anteriormente. Vamos entretanto resolver esse problema de forma analítica, usando o cálculo de probabilidade por condicionamento. Seja A_i o evento o jogador atinge N antes de quebrar, começando de i. Seja $Y = 1$ se a primeira jogada é vitoriosa, $Y = 0$ caso contrário. Temos que

$$P(A_i) = E(P(A_i|Y)).$$

Temos também que para $1 \leq i \leq N - 1$,

$$P(A_i|Y = 1) = P(A_{i+1})$$
$$P(A_i|Y = 0) = P(A_{i-1}).$$

A ruína do jogador

Logo,

$$\begin{aligned} P(A_i) &= E(P(A_i|Y)) = p \times P(A_i|Y=1) + (1-p) \times P(A_i|Y=0) \\ &= p \times P(A_{i+1}) + (1-p) \times P(A_{i-1}). \end{aligned}$$

Escrevendo $P_i = P(A_i)$, $q = 1 - p$, temos a seguinte equações a diferenças e condições inicial e terminal:

$$P_i = p \times P_{i+1} + q \times P_{i-1}, \;\; P_0 = 0, \;\; P_N = 1.$$

A ruína do jogador

Resolvendo para $q \neq p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Para $q = p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{i}{N}.$$