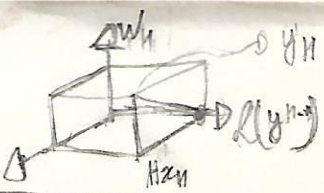


Prova: Inicialmente, assuma $\mu_0 = 0$ e $u_k = 0$ para todo k.

Portanto $E x_k = 0$, $E y_k = 0$ para todo k. Temos que

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_{k|k-1} = H(k)\,\hat{x}_{k|k-1}$$

já que $w_k \perp \mathcal{L}(y^{k-1})$ (y^{k-1} depende de $w_{k-1}, \dots, w_0, x_0$) e portanto

$$\Rightarrow \quad \hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + E\left(x_k\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right)\left(E\left(\tilde{y}_{k|k-1}\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right)\right)^{-1}\left(y_k - H(k)\,\hat{x}_{k|k-1}\right)$$

(veremos que $\operatorname{cov}(\tilde{y}_{k|k-1})$ é não singular). Agora

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}_{k|k-1} = y_k - \hat{y}_{k|k-1} = H(k)\,\tilde{x}_{k|k-1} + G(k)\,w_k = \nu_k$$

$x_k \perp w_k$ depende de $w_{k-1}, \dots, w_0$

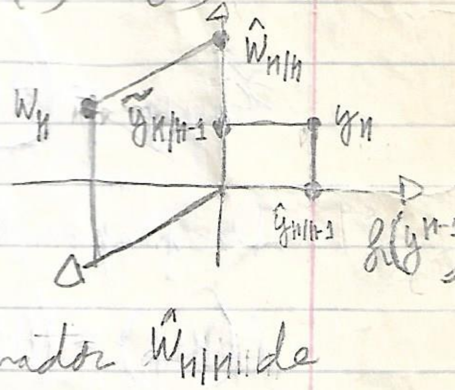
$$\Rightarrow \quad E\left(x_k\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right) = E\Big(x_k\big(\tilde{x}'_{k|k-1} H'(k) + \underbrace{w'_k}_{0} G'(k)\big)\Big) =$$

$$E\Big(\left(\hat{x}_{k|k-1} + \tilde{x}_{k|k-1}\right)\left(\tilde{x}'_{k|k-1} H'(k)\right)\Big) = P(k)\, H'(k)$$

$\hat{x}_{k|k-1} \perp \tilde{x}_{k|k-1}$

onde $P(k) = E\left(\tilde{x}_{k|k-1}\, \tilde{x}'_{k|k-1}\right)$. Da mesma forma,

$$E\left(\tilde{y}_{k|k-1}\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right) = H(k)\,P(k)\,H'(k) + G(k)\,G'(k) > 0$$



Como $u_k = 0$,

Operador projeção é linear

$$\hat{x}_{k+1/k} = A(k)\,\hat{x}_{k|k} + C(k)\,\hat{w}_{k|k}$$

Temos $w_k \perp \mathcal{L}(y^{k-1})$ e o melhor estimador $\hat{w}_{k|k}$ de w_k dado y^k é igual ao melhor estimador dado $\tilde{y}_{k|k-1}$.

$$\hat{w}_{k|k} = E\left(w_k\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right)\left(E\left(\tilde{y}_{k|k-1}\, \tilde{y}'_{k|k-1}\right)\right)^{-1} \tilde{y}_{k|k-1}$$

y_k depende de $w_k, w_{k-1}, \dots$

114

$$x_n - \hat{x}_{n|n-1} \to \text{depende de } w_{n-1}, \ldots, w_0, x_0$$

$$E\left(w_n \tilde{y}'_{n|n-1}\right) = E\left(w_n\left(\tilde{x}'_{n|n-1} H'(n) + w'_n G'(n)\right)\right) = G'(n)$$

$$\hat{x}_{n|n} = \hat{x}_{n|n-1} + P(n)H'(n)\left(H(n)P(n)H'(n) + G(n)G'(n)\right)^{-1}\left(y_n - H(n)\hat{x}_{n|n-1}\right)$$

$$\hat{x}_{n+1|n} = A(n)\hat{x}_{n|n} + C(n)\hat{w}_{n|n}$$

$$\hat{w}_{n|n} = G'(n)\left(H(n)P(n)H'(n) + G(n)G'(n)\right)^{-1}\left(y_n - H(n)\hat{x}_{n|n-1}\right)$$

$$\hat{x}_{n+1|n} = A(n)\left[\hat{x}_{n|n-1} + P(n)H'(n)\left(H(n)P(n)H'(n) + G(n)G'(n)\right)^{-1}\tilde{y}_{n|n-1}\right]$$

$$+ C(n)G'(n)\left(H(n)P(n)H'(n) + G(n)G'(n)\right)^{-1}\tilde{y}_{n|n-1} =$$

$$= A(n)\hat{x}_{n|n-1} + Q(n)\left(y_n - H(n)\hat{x}_{n|n-1}\right)$$

$$\hat{x}_{0|-1} = 0 = \mu_0$$

→ Temos também que $x(n+1) = A(n)x(n) + C(n)w(n)$

$$\hat{x}_{n+1|n} = A(n)\hat{x}_{n|n-1} + Q(k)\left(H(n)\tilde{x}_{n|n-1} + G(n)w_n\right)$$

$$\tilde{x}_{n+1|n} = \left(A(n) - Q(n)H(n)\right)\tilde{x}_{n|n-1} + \left(C(n) - Q(n)G(n)\right)w_n$$

Da proposição 2.4.1.,

$$P(n+1) = \left(A(n) - Q(n)H(n)\right)P(n)\left(A(n) - Q(n)H(n)\right)' +$$

$$\left(C(n) - Q(n)G(n)\right)\left(C(n) - Q(n)G(n)\right)'.$$

Substituindo o $Q(n)$ pela expressão obtida acima

Suponha que $Ex_0 = \mu_0 \neq 0$ e que μ_k são diferentes de zero. Então $Ex_k = \mu_k$ satisfaz a

$$\mu_{k+1} = A(k)\mu_k + B(k)u_k$$

$$Ey_k = H(k)\mu_k$$

Como mostrado anteriormente, o melhor estimador afim de x_k dado y^{k-1} é

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}^c_{k|k-1} + \mu_k$$

onde $\hat{x}^c_{k|k-1}$ é a projeção de $x^c_k = x_k - \mu_k$ em $\mathcal{L}\left((y^c)^{k-1}\right)$. Entretanto, x^c_k, y^c_k satisfazem as equações

$$x^c_{k+1} = A(k)x^c_k + C(k)w_k \quad , x^c_0 = x_0 - \mu_0$$

$$y^c_k = H(k)x^c_k + G(k)w_k$$

e portanto

$$\hat{x}^c_{k+1|k} = A(k)\, x^c_{k|k-1} + Q(k)\left(y^c_k - H(k)x^c_{k|k-1}\right)$$

$$\hat{x}^c_{0|-1} = 0$$

Note que

$$y^c_k - H(k)\hat{x}^c_{k|k-1} = y_k - \cancel{H(k)\mu_k} - H(k)\left(\hat{x}_{k|k-1} - \cancel{\mu_k}\right) =$$

$$y_k - H(k)\hat{x}_{k|k-1}$$

23

$$\hat{x}_{k+1|k} = \hat{x}^c_{k+1|k} + \mu_{k+1} = A(k)\hat{x}_{k|k-1} + B(k)u_k + Q(k)\overbrace{\left(y^c_k - H(k)x^c_{k|k-1}\right)}^{y_k - H(k)\hat{x}_{k|k-1}}$$

Somando os resultados acima, obtem-se a conclusão do Teorema.

Se $x_0, w_0, w_1, \_\_$, são conjuntamente normal então x_k, y_k é um processo normal (já que todas as equações são lineares) e segue do Teorema 3.1.2 que $\hat{x}_{k|k-1} = E(x_k | y^{k-1})$.

Aula 7

Exemplo: Considere o sistema dinâmico

$$x_{k+1} = a x_k + v_k = a x_k + (0\ 1)\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

$$y_k = x_k + w_k = x_k + (1\ 0)\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

Assume-se que v_k, w_k são processos de ruído branco de variancia unitária descorrelatados. Assume-se também que $E(x_0) = \mu_0$, $E(x_0 - \mu_0)^2 = P_0$. Temos

$$P(k+1) = a^2 P(k) + 1 - \frac{(a P(k))^2}{P(k)+1} =$$

$$= \frac{\cancel{a^2 P(k)^2} + a^2 P(k) + P(k) + 1 - \cancel{a^2 P(k)^2}}{P(k)+1} = \frac{(1+a^2)P(k)+1}{1+P(k)}$$

$$Q(k) = \frac{a P(k)}{1+P(k)}$$

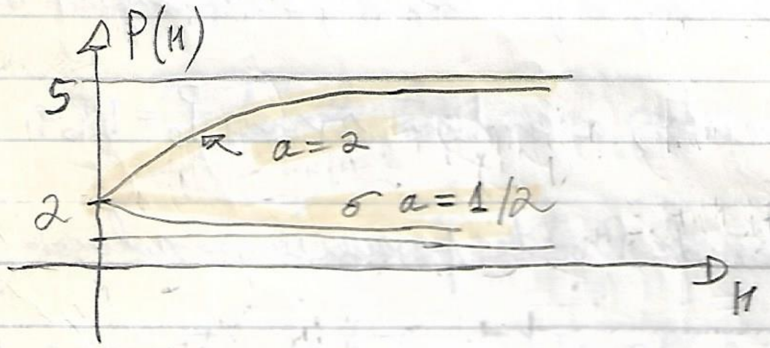
$$\hat{x}_{k+1|k} = a\,\hat{x}_{k|k-1} + \frac{a\,P(k)}{1+P(k)}\left(y_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)$$

$$P(k) \xrightarrow{k\to\infty} P(a)$$

$$P(a) = \frac{(1+a^2)P(a)+1}{1+P(a)} \therefore P^2(a) - a^2P(a) - 1 = 0 \therefore$$

$$P(a) = \frac{1}{2}\left(a^2 + \sqrt{a^4+4}\right)$$

Considere dois valores de a: $a = 1/2$ e $a = 2$ (sistema instável)



$P_0 = 2$

$P(1/2) = 1,13278$

Note que $P(k) \xrightarrow{k\to\infty} P(a)$ mesmo quando o sistema é instável ($a=2$). É claro que neste caso, $var(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ mas a variância condicional do erro $P(k)$ permanece limitado. Para $a=2$, $P(2) = 4,2361$ e $Q(2) = 1,618$. Daí,

$$\tilde{x}_{k+1|k} = \left(a - Q(k)\right)\tilde{x}_{k|k-1} + v_k - Q(k)\,w_k$$

Para k suficientemente grande,

$$\tilde{x}_{k+1|k} = 0,382\,\tilde{x}_{k|k-1} + v_k - 1,618\,w_k \quad \text{(sistema estável)}$$

$$\overbrace{var(x_k)}^{\to\infty} = \overbrace{var(\hat{x}_{k|k-1})}^{\to\infty} + \overbrace{var(\tilde{x}_{k|k-1})}^{\to \text{limitado}}$$

Para sistemas invariantes (A, B, C, H, G independem de k)

os resultados acima sugerem estudar a equação algébrica

de Riccati

$$P = APA' + CC' - [APH' + CG'][HPH' + GG']^{-1}[APH' + CG']'$$

Se P_0 satisfaz a equação acima, então $P(k) = P_0$ para todo k e

o filtro de Kalman é invariante no tempo (note que

isto não implica em dizer que x_k (com $u_k = 0$) seja estacionário no sen-

tido amplo; para isto, a condição seria $P_0 = AP_0A' + CC'$).

Quando a equação de Riccati possui uma solução?

Define-se $\tilde{A} = A - CG'(GG')^{-1}H$, $\tilde{C} = C(I - G'(GG')^{-1}G)$.

Theorema 3.3.2: (a) Se o par (H, A) é detetável então existe

pelo menos uma solução positiva semi-definida para a equação

algébrica de Riccati.

(b) Se além disto o par $(\tilde{A}, \tilde{C})$ for estabilizável então esta

solução P é única (≥ 0) e $P(k) \xrightarrow{k \to \infty} P$ para P_0 positiva semi-definida

qualquer. A matriz ganho do filtro de Kalman $A - QH$ é estável, onde

$$Q = [APH' + CG'][HPH' + GG']^{-1}$$

O filtro de Kalman pode ser escrito como

$$\hat{x}_{n+1|n} = \left(A - Q(n)H\right)\hat{x}_{n|n-1} + Bu_n + Q(n)y_n$$

Se (a) e (e) do Teorema acima forem satisfeitos o sistema vai ser invariante no tempo (i.e, $Q(n) = Q$) se $P(0) = P$, a solução da equação algébrica de Riccati. Se $P(0) \neq P$, $Q(n) \xrightarrow{n \to \infty} Q$ e o filtro é quase invariante no tempo para n grande e é estável, já que $A - QH$ é estável. Como a convergência para o estado estacionário é geralmente rápida, usa-se o filtro estacionário mesmo quando $P(0) \neq P$.

Note o seguinte resultado:

<u>Proposição 3.3.3</u>: Suponha que no modelo

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= A x_n + B u_n + C w_n \\ y_n &= H x_n + G w_n \end{aligned}\right\} (1)$$

y_n e w_n tenham a mesma dimensão e G é não singular. Então $P = 0$ é uma solução para a equação algébrica de Riccati; ela é única se $A - CG^{-1}H$ é estável

Tempo Contínuo:

$\{\xi(t)\}, \{W(t)\}$ — movimento Browniano padrão independentes

$W(t) \sim N(0, tI)$

$$\begin{cases} dx(t) = A(t)x(t)\,dt + C(t)\,dW(t) \\ dy(t) = H(t)x(t)\,dt + G(t)\,d\xi(t) \end{cases}$$

$G(t)G(t)' > 0$

$$E(\Delta W_{n_1} \Delta W_{n_2}') = \Delta t\, I\, \delta(n_2 - n_1), \quad E(\Delta \xi_{n_1} \Delta \xi_{n_2}') = \Delta t\, I\, \delta(n_2 - n_1)$$

Aproximando, temos que: $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, $A_n = A(t_n)$, etc

$x_n = x(t_n)$, $y_n = \dfrac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t}$, $W_n = W(t_n)$, $\xi_n = \xi(t_n)$, $dx(t) \approx x(t+\Delta t) - x(t)$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (I + A_n \Delta t)x_n + C_n \Delta W_n \\ y_n = H_n x_n + \dfrac{G_n}{\Delta t} \Delta \xi_n \end{cases}$$

$\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$

$$\begin{cases} E(\Delta W_n \Delta W_n') = \Delta t I \\ E(\Delta \xi_n \Delta \xi_n') = \Delta t I \end{cases}$$

$$P_{n+1} = (I + A_n \Delta t) P_n (I + A_n \Delta t)' + \Delta t\, C_n C_n' - \left((I + A_n \Delta t) P_n H_n'\right) \left(H_n P_n H_n' + \frac{G_n G_n'}{\Delta t}\right)^{-1} (\;-\;)'$$

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{\Delta t} = A_n P_n + P_n A_n' + C_n C_n' - (I + A_n \Delta t) P_n H_n' (H_n P_n H_n' \Delta t + G_n G_n')^{-1} H$$

$$+ (A_n P_n A_n' \Delta t)$$

Fazendo $\Delta t \to 0$, segue que (Eq. Diferencial de Riccati Matricial)

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A(t)' + C(t)C(t)' - P(t)H(t)'\left(G(t)G(t)'\right)^{-1}H(t)P(t) \end{cases}$$

Ganho:

$$Q_k = \left((I + A_k \Delta t)P_k H_k'\right)\left(H_k P_k H_k' + \frac{G_k G_k'}{\Delta t}\right)^{-1}$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = (I + A_k \Delta t)\hat{x}_{k|k-1} + Q_k\left(y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}\right)$$

$$\frac{\hat{x}_{k+1|k} - \hat{x}_{k|k-1}}{\Delta t} = A_k \hat{x}_{k|k-1} + \frac{Q_k}{\Delta t}\left(y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}\right)$$

$$\frac{Q_k}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} P(t)H(t)'\left(G(t)G(t)'\right)^{-1}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + Q(t)\left(\dot{y}(t) - H\hat{x}(t)\right) \\ Q(t) = P(t)H(t)'\left(G(t)G(t)'\right)^{-1} \end{cases}$$