PTC-5720 Controle Estocástico

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aula 8 - 2020

PTC-EPUSP

Estimação Recursiva

Suponha que x seja um vetor aleatório n dimensional e $y_1, y_2, \ldots,$ vetores r-dimensional observados ao longo do tempo. Suponha também por simplicidade que todas as varáveis aleatórias tenham média nula, variância finita, e que a matriz de covariância do vetor rk dimensional

$$y^k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

seja não singular.

Estimação Recursiva

Represente por $\mathcal{L}(y^k)$ o sub-espaço linear gerado pelas observações até o instante k e por $\widehat{x}_k$ o melhor estimador linear de x dado por y^k, i.e., a projeção de x em $\mathcal{L}(y^k)$. Logicamente temos que

$$\mathcal{L}(y^{k-1}) \subset \mathcal{L}(y^k)$$

Seja $\widehat{y}_{k|k-1}$ a projeção de y_k em $\mathcal{L}(y^{k-1})$, e defina

$$\widetilde{y}_{k|k-1} = y_k - \widehat{y}_{k|k-1}.$$

O vetor aleatório $\{\widetilde{y}_{k|k-1}\}$ gera o complemento ortogonal de $\mathcal{L}(y^{k-1})$ em $\mathcal{L}(y^k)$, tal que qualquer vetor aleatório Z em $\mathcal{L}(y^k)$ tem uma decomposição ortogonal única

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

Estimação Recursiva

onde

$$Z_1 \in \mathcal{L}(y^{k-1}), \;\; Z_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{y}_{k|k-1}).$$

Considere $Z = \widehat{x}_k$. Então $Z_1 = \widehat{x}_{k-1}$. Realmente, seja o erro do estimador no instante k,

$$\widetilde{x}_k = x - \widehat{x}_k.$$

Então,

$$x = \widehat{x}_k + \widetilde{x}_k = Z_1 + (Z_2 + \widetilde{x}_k)$$

onde $Z_1 \in \mathcal{L}(y^{k-1})$ e $Z_2 + \widetilde{x}_k \perp \mathcal{L}(y^{k-1})$.

Estimação Recursiva

Temos também que

$$x = \widehat{x}_{k-1} + \widetilde{x}_{k-1}$$

e novamente $\widehat{x}_{k-1} \in \mathcal{L}(y^{k-1})$, $\widetilde{x}_{k-1} \perp \mathcal{L}(y^{k-1})$, e pela unicidade da projeção ortogonal, $Z_1 = \widehat{x}_{k-1}$. Para Z_2 temos que

$$\widehat{x}_k\ (Z) = \widehat{x}_{k-1}\ (Z_1) + Z_2$$

Estimação Recursiva

e Z_2 é a projeção de $\widehat{x}_k$ em $\mathcal{L}(\widetilde{y}_{k|k-1})$, que é o mesmo que a projeção de x em $\mathcal{L}(\widetilde{y}_{k|k-1})$, já que $\mathcal{L}(\widetilde{y}_{k|k-1}) \subset \mathcal{L}(y^k)$. Logo

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_{k-1} + E(x\widetilde{y}'_{k|k-1})E(\widetilde{y}_{k|k-1}\widetilde{y}'_{k|k-1})^{-1}(y_k - \widehat{y}_{k|k-1})$$

Exercício 2 - Filtragem Linear - Fórmula Recursiva

Seja H uma matriz $r \times n$ e z_k, $k = 1, 2, \ldots,$ uma sequência de ruído branco no sentido amplo, com média 0 e matriz de covariância $cov(z_k) = N > 0$. Suponha que

$$y_k = Hx + z_k$$

e também que x e z_k são descorrelacionadas para cada k. Portanto y_k representa uma sequência de medidas de x com erros de medida descorrelacionados z_k. Determine pela fórmula recursiva $\widehat{x}_k$, a projeção de x no espaço $\mathcal{L}(y^k)$, onde

$$y^k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Filtro de Kalman

Considere o sistema

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= A(k)x_k + B(k)u_k + C(k)w_k \\
y_k &= H(k)x_k + G(k)w_k
\end{aligned}
$$

Hipóteses:

1. $\{u_k\}$ é uma sequência determinística (depois vamos relaxar para ser uma realimentação de estado).
2. $\{w_k\}$ é um processo de ruído branco no sentido amplo, com matriz de covariância igual a identidade, e x_0 é a condição inicial descorrelacionado de $\{w_k\}$, com média $E(x_0) = \mu_0$ e matriz de covariância $cov(x_0) = P_0$.
3. $G(k)G(k)' > 0$

Filtro de Kalman

O exemplo anterior é um caso particular do modelo acima fazendo:

$$A(k) = I,\ B(k) = C(k) = 0$$
$$H(k) = H,\ G(k) = N^{1/2}$$

Filtro de Kalman

Notação:

1. $\widehat{x}_{i|j}$ é o melhor estimador linear (ou afim) de x_i dado $y^j = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_j \end{pmatrix}$, isto é, a projeção de x_i em $\mathcal{L}(y^j)$.
2. $\widetilde{x}_{i|j} = x_i - \widehat{x}_{i|j}$, é o erro de estimação.
3. a mesma notação vale para as outras variáveis, por exemplo, $\widehat{y}_{i|j}$, $\widetilde{y}_{i|j}$.
4. $P(k) = cov(\widetilde{x}_{k|k-1}) = E(\widetilde{x}_{k|k-1}\widetilde{x}'_{k|k-1})$, matriz covariância do erro.

Filtro de Kalman

$$\begin{aligned}\widehat{x}_{k+1|k} &= A(k)\widehat{x}_{k|k-1} + B(k)u(k) + Q(k)(y_k - H(k)\widehat{x}_{k|k-1}),\\ \widehat{x}_{0|-1} &= \mu_0\end{aligned}$$

A matriz de ganho do filtro $Q(k)$ é dada por

$$Q(k) = \Big(A(k)P(k)H(k)' + C(k)G(k)'\Big)\Big(H(k)P(k)H(k)' + G(k)G(k)'\Big)^{-1}$$

Filtro de Kalman

A matriz de covariância do erro $P(k)$ é dada por:

$$P(k+1) = A(k)P(k)A(k)' + C(k)C(k)' - \Big(A(k)P(k)H(k)' + C(k)G(k)'\Big)$$
$$\times \Big(H(k)P(k)H(k)' + G(k)G(k)'\Big)^{-1}\Big(A(k)P(k)H(k)' + C(k)G(k)'\Big)',$$
$$P(0) = P_0$$

Filtro de Kalman

O processo de inovação

$$\nu_k = y_k - H(k)\widehat{x}_{k|k-1}$$

é um processo de ruído branco no sentido amplo com função covariância dada por

$$E(\nu_i \nu_j') = \Big(H(k)P(k)H(k)' + G(k)G(k)' \Big) \delta ij$$

Filtro de Kalman

Se $\{x_0, w_0, w_1, \ldots\}$ são conjuntamente normalmente distribuídas ($\{w_k\}$ é um processo de ruído branco) então

$$\widehat{x}_{k|k-1} = E(x_k|y^{k-1}).$$

1. Primeiro calcula-se $Q(k)$ e $P(k)$.
2. Depois avalia-se $\widehat{x}_{k|k-1}$ tendo y_{k-1}.
3. Exercício: Como obter $\widehat{x}_{k|k}$?