Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Disciplina 4300255

Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Corpos que rolam
Rolamento sem escorregamento
Rolamento com escorregamento

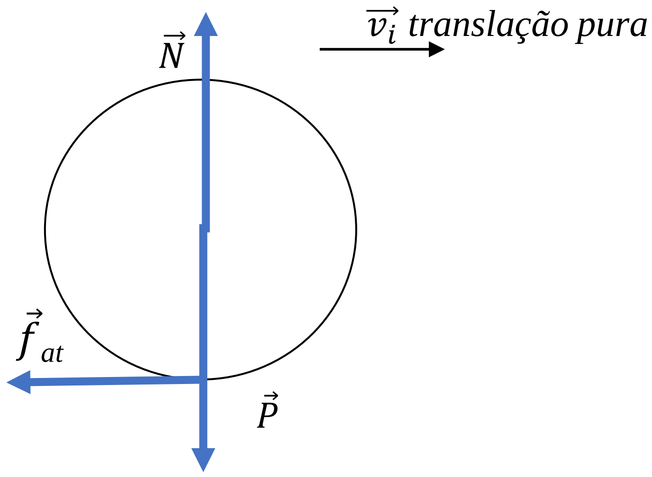
Rolamento com escorregamento (Revisão)

Quando um corpo escorrega ao mesmo tempo em que rola, não vale a condição de ausência de escorregamento. Imaginemos uma bola que **unicamente escorrega**, **sem rotação** inicial.

À medida que a bola escorrega, vá perdendo velocidade linear devido ao atrito cinético ente sua superfície e o chão. Esta força de atrito ao fornecer um torque em relação ao centro de massa, causa uma aceleração angular que altera a velocidade angular.

A velocidade linear diminui e ao mesmo tempo, a velocidade angular aumenta até que se chega à condição $v_{cm} = \omega R$ (ou $v_{cm} = -\omega R$ dependendo do sist. de referência escolhido) instante em que o escorregamento desaparece, desaparecendo também a força de atrito.

Daí em diante a bola rola sem escorregar.



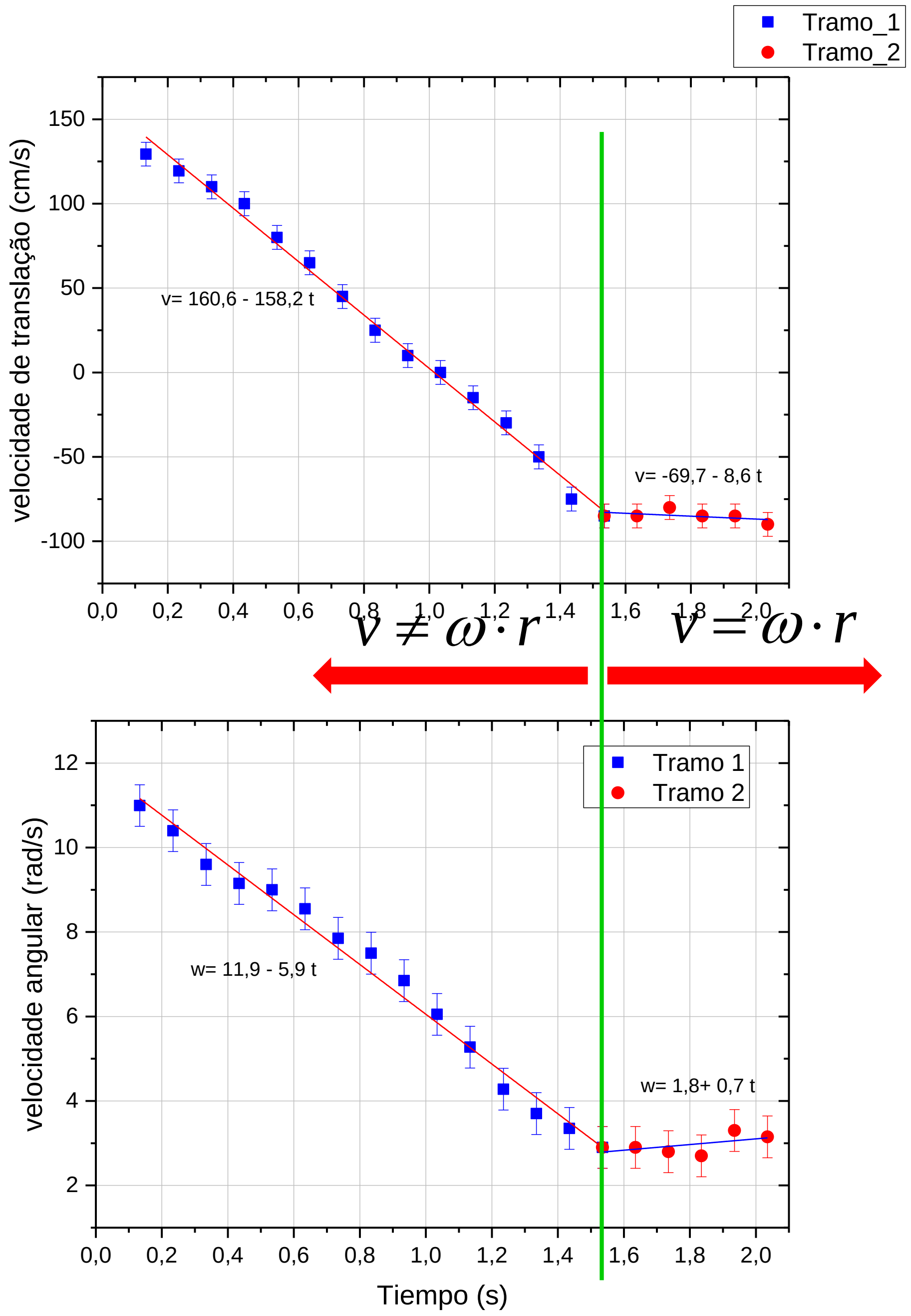
Outro exemplo é o da bola de bilhar ou de boliche que rola com efeito.

Ver os exercícios resolvidos no livro texto!!.

Análise de resultados

Rolamento com escorregamento

velocidade vs tempo



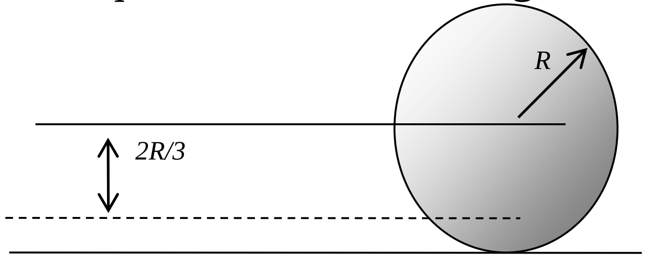
Exemplo 9-19 Uma Bola de Boliche Derrapando

Uma bola de boliche, de massa M e raio R, é lançada no nível da pista, de forma a iniciar um movimento horizontal sem rolamento, com a rapidez $v_0 = 5{,}0$ m/s. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e o piso é $\mu_c = 0{,}080$. Determine (*a*) o tempo que a bola leva derrapando na pista (após o qual ela passa a rolar sem deslizar) e (*b*) a distância na qual ela derrapa.

No problema 11 lista 3, resolvido por Richard na quinta passada obtivemos o valor da velocidade angular:

$$\omega = -\frac{5v_{0,CM}(h-R)}{2R^2}$$

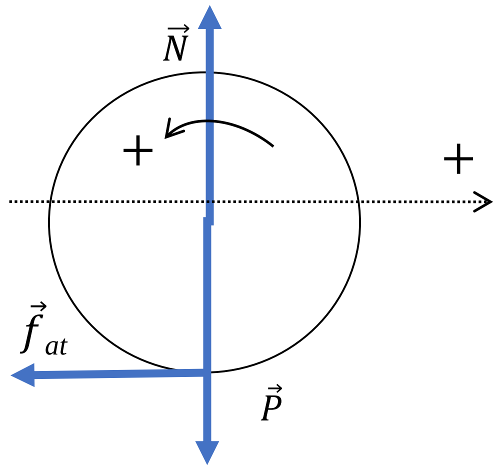
12. (Tipler Cap 9, E 107) Uma bola de bilhar inicialmente em repouso, recebe um golpe seco do taco. A força aplicada é horizontal e está à distância 2R/3 abaixo da linha central, como mostra a figura ao lado. A velocidade inicial da bola é v_0 e o coeficiente de atrito cinético é μ_k. a) Qual é a velocidade angular inicial ω_0? b) Que velocidade tem a bola no instante em que principia a rolar sem escorregar? c) Qual a energia cinética inicial da bola? d) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa?



a) Utilizaremos a solução do problema anterior, sabendo que a velocidade inicial é v_0. Por comparação com o problema anterior, sendo h a distância do solo até a posição onde bate o taco, e sendo a distância fornecida a partir do centro da bola, $h=R-2/3R=R/3$.

$$\omega_0 = -\frac{5v_{0,CM}(h-R)}{2R^2} \qquad \omega_0 = -\frac{5v_0(\frac{R}{3}-R)}{2R^2} = -\frac{v_0}{R}\frac{5(\frac{R-3R}{3})}{2R} = \frac{5v_0}{R}\frac{\frac{2R}{3}}{2R} = \frac{5v_0}{3R}$$

b) As forças que atuam sobre a bola são: o peso, a normal e a força de atrito.



Aplicando a 2ª lei de Newton à translação do CM no sistema de referencia solo após a tacada, vemos que a única força que atua na direção do deslocamento é a de atrito, então: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM} \rightarrow -f = ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = -\frac{f}{m}$. (1)

Desde o ponto de vista da rotação, vemos que há uma força que produz torque em relação ao centro de massa, portanto o sistema é acelerado:

$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow -fR = I\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{fR}{I} = -\frac{fR}{\frac{2}{5}mR^2} = -\frac{5f}{2mR} \qquad (2)$$

As velocidades linear e angular a qualquer tempo $t < t_r$ (tempo de rolamento sem escorregamento) dependerão das acelerações correspondentes, assim:

$v_{CM(S)} = v_0 + a_{CM}t = v_0 - \frac{f}{m}t$ (3),

e $\omega_{b(CM)} = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R} - \frac{5}{2}\frac{f}{mR}t$ (4)

$v_{CM(S)} = v_0 + a_{CM}t = v_0 - \frac{f}{m}t$ (3),

e $\omega_{b(CM)} = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R} - \frac{5}{2}\frac{f}{mR}t$ (4)

As expressões (3) e (4) relacionam *v* e *ω* para tempos iguais.

Assim de (3) e (1) $v - v_0 = -\frac{f}{m}t \Rightarrow t = \frac{(-v+v_0)m}{f}$ (5), que substituindo em (4),

$$\omega = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R} - \frac{5}{2}\frac{f}{mR}\frac{(-v+v_0)m}{f} = \frac{5}{3}\frac{v_0}{R} - \frac{5}{2}\frac{(-v+v_0)}{R} = \frac{5}{R}\left(\frac{v_0}{3} + \frac{v}{2} - \frac{v_0}{2}\right) = \frac{5}{R}\left(\frac{v}{2} - \frac{v_0}{6}\right)$$

$$\therefore \omega = \frac{5}{2R}\left(v - \frac{v_0}{3}\right) \qquad (6)$$

Relação que vale para qualquer *t* entre 0 e t_r. Onde t_r é o tempo do inicio do rolamento sem escorregamento.

A condição de rolamento sem escorregamento, respeitando os sinais dos referenciais adotados,

$$s_{CM(S)} = -\theta_{b(CM)}R; \qquad v_{CM(S)} = -\omega_{b(CM)}R \qquad a_{CM(S)} = -\alpha_{b(CM)}R \qquad (7).$$

No instante em que começa a rodar sem escorregar $v_r = -\omega_r R$. Substituindo ω obtido da expressão (6)

$$\omega = \frac{5}{2R}\left(v - \frac{v_0}{3}\right) \qquad \omega_r = \frac{5}{2R}\left(v_r - \frac{v_0}{3}\right)$$

$$v_r = -\frac{5}{2R}\left(v_r - \frac{v_0}{3}\right)R = -\frac{5}{2}\left(v_r - \frac{v_0}{3}\right) = -\frac{5}{2}v_r + \frac{5v_0}{6}$$

$$v_r\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{6}v_0 \Rightarrow v_r\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{6}v_0 \Rightarrow v_r = \frac{5}{6}\frac{2}{7}v_0 = \frac{5}{21}v_0.$$

Substituindo o valor da velocidade de translação v pelo valor da velocidade de translação no rolamento, v_r, na expressão (6).

$$\omega_r = \frac{5}{2R}\left(v_r - \frac{v_0}{3}\right) = \frac{5}{2R}\left(\frac{5}{21}v_0 - \frac{v_0}{3}\right) = \frac{5v_0}{2R}\left(\frac{5-7}{21}\right) = -\frac{5v_0}{2R}\left(\frac{2}{21}\right) = -\frac{5v_0}{21R}$$

Que era de esperar por ser $\omega_{b(CM)} = -\frac{v_{CM(S)}}{R}$

c) Qual a energia cinética inicial da bola?

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{5}mv_0^2\frac{25}{9} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mv_0^2\frac{5}{9} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 + \frac{10}{9}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{9+10}{9}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{19}{9}\right)$$

$$= \frac{19}{18}mv_0^2 = \frac{19}{2\cdot 9}mv_0^2 = 1{,}05556mv_0^2$$

d) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa?

$$W_f = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}I\omega_r^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_r^2\left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}mv_r^2\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$K_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{21}v_0\right)^2\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2}m\frac{25}{21\cdot 21}\frac{7}{5}v_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{5}{21\cdot 3}v_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{5}{63}v_0^2 = \frac{5}{126}mv_0^2$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} m \frac{5}{63} v_0^2 - \frac{19}{2 \cdot 9} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{9}\left(\frac{5}{7} - 19\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{9}\left(\frac{5 - 7 * 19}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{9} m v_0^2 \left(\frac{5 - 133}{7}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{9} m v_0^2 \left(\frac{128}{7}\right) = -\frac{128}{63}\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right) = -1{,}01587 m v_0^2$$

Outra forma de obter o trabalho do atrito

Como podemos verificar a distância percorrida num movimento uniformemente acelerado?

“Área entre a curva da velocidade em função do tempo, e o eixo do tempo”!!!

Desta maneira, para a distância percorrida pelo CM (fig 1) ou para o ângulo descrito (fig 2)

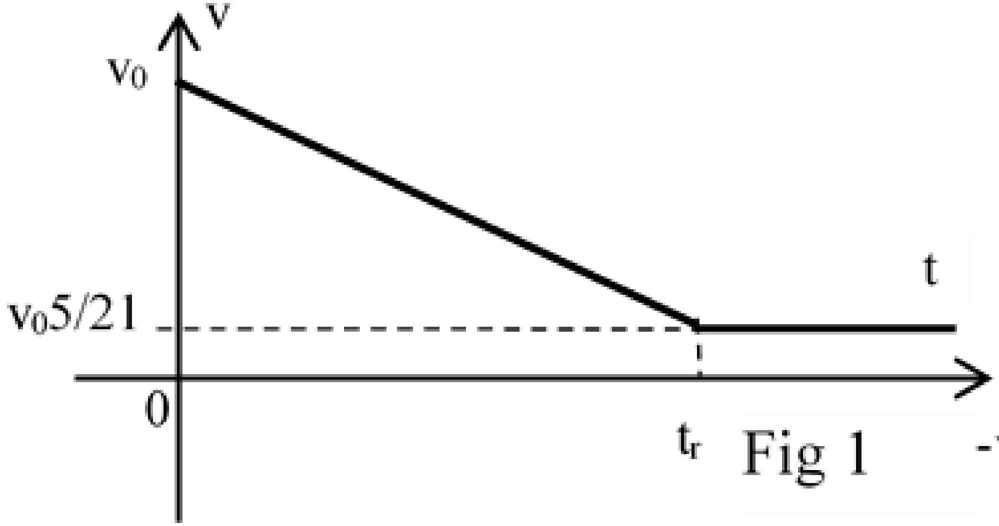


Fig 1

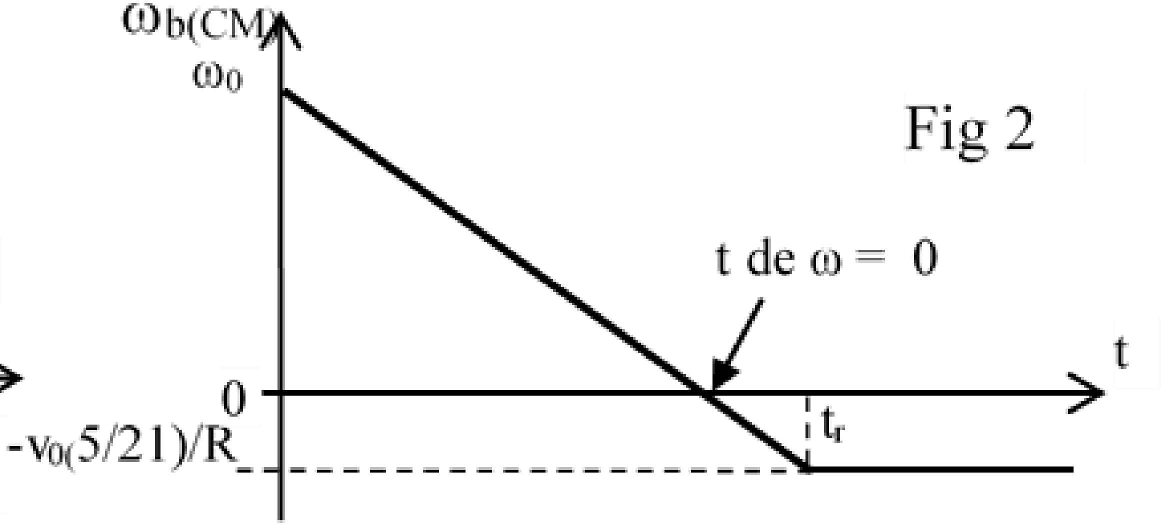
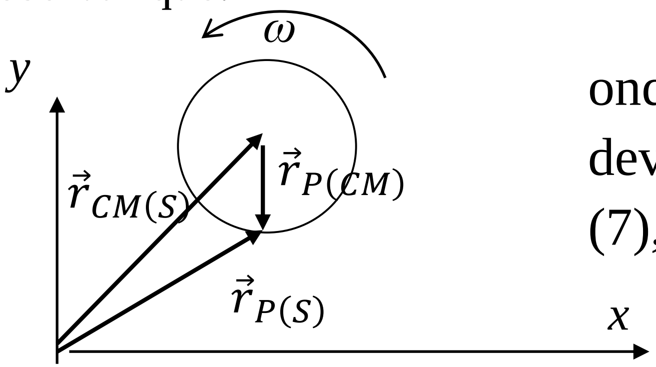


Fig 2

Localizando dois referenciais, o do CM e o referencial solo, podemos observar que:

$$v_{p(S)} = v_{p(CM)} + v_{CM(S)} \quad , (8)$$



onde $v_{p(S)}$é a velocidade do ponto de contato. Quando roda sem escorregar, se deve satisfazer a relação: $v_{p(CM)} = -\omega_{CM} R$, (9) como tínhamos expressado em (7), sendo ω_{CM} a velocidade de rotação da bola em relação ao CM.

Substituindo (9) em (8),

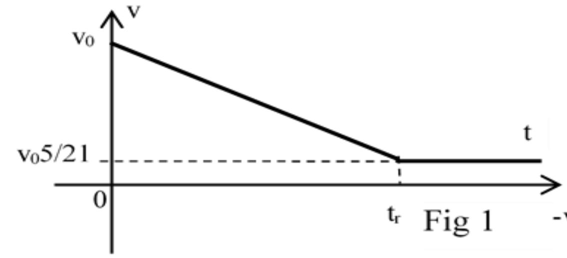
$$v_{p(S)} = -\omega_{(CM)} R + v_{CM(S)}, \text{ mas}$$

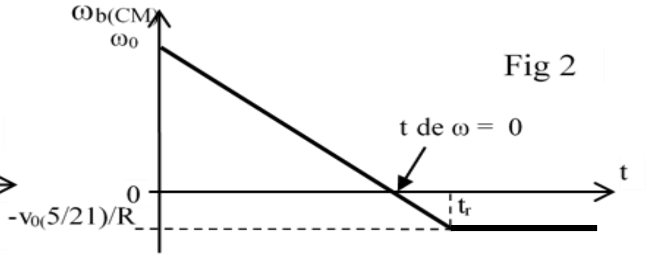
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx_{p(S)}}{dt} = -\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)} \Rightarrow dx_{p(S)} = \left(-\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}\right) dt$$

Integrando a ambos lados da expressão anterior, $\Delta x_{p(S)} = \int\left(-\omega_{b(CM)}R + v_{CM(S)}\right)dt$

Agora, sabemos que podemos obter o quanto se deslocou um corpo quando está uniformemente acelerado e se conhecem a velocidade inicial, a velocidade final e o tempo.
Pode ser obtido como a área sob a curva de *v(t)*, assim, da primeira figura e da equação

$t = \frac{(-v+v_0)m}{f}$, para $t = t_r$, $t_r = \frac{\left(-\frac{5v_0}{21} - v_0\right)m}{f}$





$$\Delta x_{CM(S)} = \left(\frac{\frac{5}{21}v_o + v_o}{2}\right)t_r = -\left(\frac{\frac{5+21}{21}v_o}{2}\right)\left(-\frac{5}{21}v_o + v_o\right)\frac{m}{f} = -\left(\frac{26v_o}{42}\right)\left(-\frac{16}{21}\right)v_o\frac{m}{f}$$

$$= \frac{13*16}{21^2}v_o^2\frac{m}{f}$$

Por outro lado, enquanto o corpo desliza na horizontal, a roda gira inicialmente com ω positivo, passa por zero e finaliza com ω negativo. Observando a fig 2, vemos que também se trata de um movimento uniformemente acelerado. Podemos calcular o ângulo descrito por:

$$\Delta\theta_{b(CM)} = \left(\frac{\omega_f + \omega_0}{2}\right)\Delta t = \frac{-\frac{5}{21}\frac{v_0}{R} + \frac{5}{3}\frac{v_0}{R}}{2}\cdot t_r = \frac{\frac{-5+35}{21}\frac{v_0}{R}}{2}\left(\frac{\left(-\frac{5v_0}{21} + v_0\right)m}{f}\right) =$$

$$= \frac{30v_0}{21 \cdot 2R} \cdot \left(\frac{\frac{-5+21}{21}}{f} mv_0 \right) = \frac{15v_0}{21R} \left(\frac{16}{21f} mv_0 \right) = \frac{15 \cdot 16}{21 \cdot 21fR} mv_0^2 = \frac{5 \cdot 16}{21 \cdot 7fR} mv_0^2$$

$$\Delta\theta_{b(CM)} = \frac{80}{147} \frac{mv_0^2}{fR}$$ então

$$\Delta S_{p(S)} = \Delta\theta_{b(CM)} R \Rightarrow \Delta S_{p(S)} = \frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{fR} R \Rightarrow \Delta S_{p(S)} = \frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{f}$$

Desta maneira, a distância percorrida pelos dois movimentos será:

$$d = \Delta x + \Delta S = \frac{13 \cdot 16}{21^2} v_o^2 \frac{m}{f} + \frac{80}{147} \frac{v_o^2 m}{f} = \frac{13 \cdot 16 + 80 \cdot 3}{21^2} \frac{v_o^2 m}{f} = \frac{208+240}{21^2} \frac{v_o^2 m}{f} = \frac{448}{21^2} \frac{v_o^2 m}{f}$$

e o trabalho da força,

$$f.d = -f * \frac{448}{21^2} \frac{m}{f} v_0^2 = -\frac{448}{21^2} mv_0^2 = -\frac{64}{63} mv_0^2 = -1.01587 mv_0^2$$