Variáveis Aleatórias Discretas

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2016

Profs. Fábio P. Machado e Gilberto A. Paula

Sumário

Objetivos da Aula

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de Variável Aleatória Discreta, as definições de função de probabilidade e de função de distribuição acumulada, bem como o cálculo do valor médio (ou esperança matemática) e da variância. Exemplos de modelos probabilísticos para variáveis aleatórias discretas serão apresentados.

Sumário

Variável Aleatória

Definição

Variável aleatória é qualquer função definida sobre o espaço amostral Ω que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

Variável Aleatória Discreta

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for finito ou infinito enumerável.

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- n$^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- $n^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- nº de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- nº de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- $n^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^{\underline{o}}$ de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- $n^{\underline{o}}$ de consultas ao médico num determinado ano

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- n$^{\underline{o}}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- n$^{\underline{o}}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- n$^{\underline{o}}$ de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- n$^{\underline{o}}$ de consultas ao médico num determinado ano
- n$^{\underline{o}}$ de domicílios com crianças menores de 6 anos

Variável Aleatória Discreta

Exemplos

- n$\underline{o}$ de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- n$\underline{o}$ de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- n$\underline{o}$ de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- n$\underline{o}$ de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- n$\underline{o}$ de consultas ao médico num determinado ano
- n$\underline{o}$ de domicílios com crianças menores de 6 anos
- n$\underline{o}$ de clientes que visitaram uma loja num determinado período

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{$cara,cara$\}$, $\omega_2 = \{$cara,coroa$\}$, $\omega_3 = \{$coroa,cara$\}$ e $\omega_4 = \{$coroa,coroa$\}$.

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Exemplo 1

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara,cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara,coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa,cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa,coroa}\}$.

Variável Aleatória

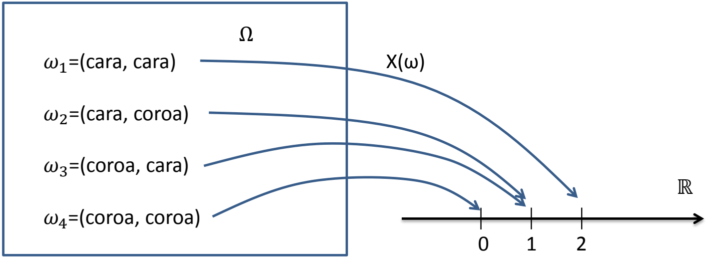
Se definimos a variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Ou seja, a variável aleatória X assume os valores $X = 0, 1, 2$.

Exemplo 1

Descrição da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Sumário

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0, 1]$.

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0, 1]$. Se denotamos $x_i = X(\omega_i)$, então podemos definir

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Definição

Para cada elemento ω_i do espaço amostral transferimos um valor $p(X(\omega_i))$ para o intervalo $[0,1]$. Se denotamos $x_i = X(\omega_i)$, então podemos definir

$$P(X = x_i) = p(x_i).$$

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de probabilidade

A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de probabilidade

A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de probabilidade

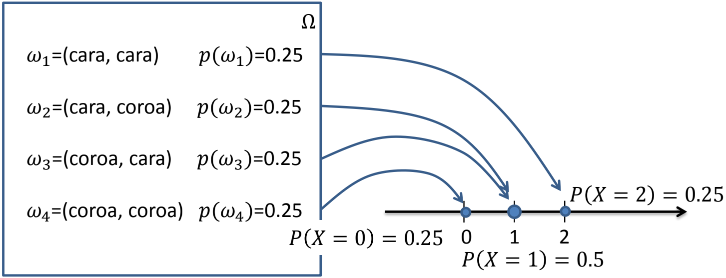
A função de probabilidade de X pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X=x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

- $p(x_i) \geq 0$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_k) = 1$

Exemplo 1

Descrição do cálculo da probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas



Exemplo 1

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

Exemplo 1

Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

$$F(x) = P(X \leq x),$$

Distribuição de Variável Aleatória Discreta

Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

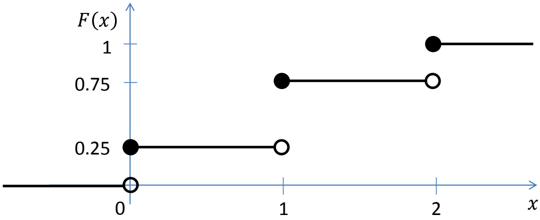
$$F(x) = P(X \leq x),$$

em que x é um número real e $F(x)$ pertence ao intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 1

Descrição da função de distribuição acumulada $F(x) = P(X \leq x)$ da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas

x	**0**	**1**	**2**
P(X=x)	**0,25**	**0,50**	**0,25**



Exemplo 1

Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

Exemplo 1

Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,75 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino).

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Exemplo 2

Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (M: masculino e F: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória X: número de crianças do sexo masculino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	3	2	2	2	1	1	1	0

Portanto, X assume os valores $X = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	MMM	MMF	MFM	FMM	MFF	FMF	FFM	FFF
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	*MMM*	*MMF*	*MFM*	*FMM*	*MFF*	*FMF*	*FFM*	*FFF*
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto, Y assume os valores $Y = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 2

Para a variável aleatória Y: número de crianças do sexo feminino temos a relação

Ω	*MMM*	*MMF*	*MFM*	*FMM*	*MFF*	*FMF*	*FFM*	*FFF*
X	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto, Y assume os valores $Y = 0, 1, 2, 3$.

Assim, para um mesmo espaço amostral podemos definir mais de uma variável aleatória.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

A função de probabilidade de X fica dada por

Exemplo 3

Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória X: número da face superior.

A função de probabilidade de X fica dada por

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

A função de probabilidade de X fica dada por

Exemplo 3

Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória X: soma das faces superiores.

A função de probabilidade de X fica dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sumário

Esperança Matemática

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

Esperança Matemática

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i), \end{aligned}$$

Esperança Matemática

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de valor médio, ou valor esperado, ou esperança matemática de X o valor

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\mu = \mathrm{E}(X)$.

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

A esperança matemática de X fica então dada por

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Exemplo 1

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0,25$	$0,50$	$0,25$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \text{E}(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Exemplo 3

Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória X: soma das faces superiores é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de X fica então dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Sumário

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k-\mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k-\mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k-\mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chamamos de variância de X o valor esperado da variável $(X-\mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (x_1-\mu)^2 p(x_1) + \cdots + (x_k-\mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (x_i-\mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Variância

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

Variância

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2,$$

Variância

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$\begin{aligned} \text{E}(X^2) &= x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p(x_i). \end{aligned}$$

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\
&= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50.
\end{aligned}
$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

Exemplo 1

Cálculo Variância

Para a variável X: número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \mathrm{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\
&= \frac{1974}{36} = 54,83.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83.\end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

Exemplo 3

Cálculo Variância

Para a variável X: soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{5,83} \cong 2,415.$$

Sumário

Propriedades

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$.

Propriedades

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

Propriedades

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $\mathrm{E}(X) = a \times p(a) = a$

Propriedades

Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória X assume um único valor a (distribuição degenerada em a), então $P(X = a) = p(a) = 1$. Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $\mathrm{E}(X) = a \times p(a) = a$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - a^2$
  $= a^2 \times p(a) - a^2$
  $= a^2 - a^2$
  $= 0$

Propriedades

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

Propriedades

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$

Propriedades

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$
  $= Var(aX) + Var(b)$
  $= Var(aX) + 0$
  $= a^2 Var(X)$

Propriedades

Propriedades 2

Se Y e X são duas variáves aleatórias tais que $Y = aX + b$, em que a e b são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$
  $= E(aX) + E(b)$
  $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$
  $= Var(aX) + Var(b)$
  $= Var(aX) + 0$
  $= a^2 Var(X)$
- $DP(Y) = |a| DP(X)$

Sumário

Distribuição de Bernoulli

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

Distribuição de Bernoulli

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que $x = 0, 1$.

Distribuição de Bernoulli

Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

Função de probabilidade

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso p, em que $X = 1$ se o resultado é sucesso e $X = 0$ se o resultado é fracasso. Então, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que $x = 0, 1$. Denotamos $X \sim \mathrm{Be}(p)$.

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada

Ensaios de Bernoulli

Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada
- hábito de práticas esportivas, sim ou não

Distribuição de Bernoulli

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

Distribuição de Bernoulli

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Distribuição de Bernoulli

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por Var(X) = E(X^2) - $[\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

Distribuição de Bernoulli

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por Var(X) = E(X^2) - $[\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Distribuição de Bernoulli

Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Variância

A variância de X é definida por Var(X) = E(X^2) - $[\mathrm{E}(X)]^2$. Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p)$ e portanto $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Sumário

Distribuição Binomial

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

Distribuição Binomial

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

Denotando S como sendo sucesso (obter face 5 num lançamento) e F como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Distribuição Binomial

Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter a face 5 duas vezes?

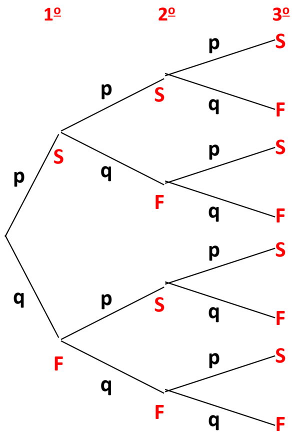
Denotando S como sendo sucesso (obter face 5 num lançamento) e F como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Vamos considerar a variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos, sendo $p = P(\text{S})$ e $q = 1 - p = P(\text{F})$ em cada lançamento.

Motivação

Diagrama de Árvore



Ω	Prob	X
(SSS)	p^3	3
(SSF)	p^2q	2
(SFS)	p^2q	2
(SFF)	pq^2	1
(FSS)	p^2q	2
(FSF)	pq^2	1
(FFS)	pq^2	1
(FFF)	q^3	0

Motivação

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

Motivação

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Motivação

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Assim, a função de probabilidade de X pode ser expressa na forma

Motivação

Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória X: número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Assim, a função de probabilidade de X pode ser expressa na forma

$$P(X=x)=\binom{3}{x}p^x(1-p)^{(3-x)},$$

para $x=0,1,2,3$.

Motivação

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

Motivação

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0,5787$	$0,3472$	$0,0694$	$0,0046$

Motivação

Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado $p = \frac{1}{6}$ obtemos

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0,5787$	$0,3472$	$0,0694$	$0,0046$

Assim, a probabilidade da face 5 aparecer duas vezes (para um dado equilibrado) fica dada por $P(X = 2) = 0,0694$.

Distribuição Binomial

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

Distribuição Binomial

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

A função de probabilidade de X é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, n$.

Distribuição Binomial

Definição

A variável aleatória X correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

A função de probabilidade de X é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, n$. Denotamos $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Distribuição Binomial

Esperança

Se $X \sim \text{B}(n, p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim \text{Be}(p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mu = \text{E}(X) = \text{E}(X_1) + \cdots + \text{E}(X_n) = np.$$

Distribuição Binomial

Esperança

Se $X \sim B(n, p)$ podemos escrever $X = X_1 + \cdots + X_n$, em que $X_i \sim Be(p)$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, obtemos

$$\mu = E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np.$$

Variância

Similarmente como temos n ensaios independentes, então

$$\sigma^2 = Var(X) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = np(1-p).$$

E daí segue que $\sigma = DP(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Distriuição Binomial

Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

Distriuição Binomial

Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

Vamos considerar a variável aleatória X: número de questões que o aluno acerta. Vamos supor que $X \sim \mathrm{B}(n, p)$, em que $n = 12$ e $p = 0,25$.

Distribuição Binomial

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

Distribuição Binomial

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$.

Distribuição Binomial

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Distribuição Binomial

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Adicionalmente, temos que o valor esperado de X fica dado por $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$.

Distribuição Binomial

Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que $x = 0, 1, \ldots, 12$. Portanto, usando uma tabela binomial obtemos $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \cdots + P(X = 12) \cong 0,0544$.

Adicionalmente, temos que o valor esperado de X fica dado por $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$. Ou seja, espera-se que o aluno acerte 3 questões.

Sumário

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p.

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$.

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$.

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$

Distribuição Geométrica

Definição

Supor que X representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade p. A função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que $x = 1, 2, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{G}(p)$. É um exemplo de variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, logo $\mathrm{DP}(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

Distribuição Geométrica

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?

Distribuição Geométrica

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?
Seja X: número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio).

Distribuição Geométrica

Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de 0,10. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de 5 tentativas?
Seja X: número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio). Vamos supor que $X \sim \mathrm{G}(0,10)$.

Distribuição Geométrica

Aplicação

Portanto, queremos saber $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$, em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para $x = 1, 2, 3, 4$.

Distribuição Geométrica

Aplicação

Portanto, queremos saber $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x)$, em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para $x = 1, 2, 3, 4$.

Daí obtemos

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= 0,10 \times \{0,90^0 + 0,90^1 + 0,90^2 + 0,90^3\} \\ &= 0,10 \times \{1 + 0,9 + 0,81 + 0,729\} \\ &= 0,10 \times 3,439 \\ &\cong 0,344 (34,4\%). \end{aligned}$$

Sumário

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$.

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$

Distribuição de Poisson

Definição

Se X representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se X segue distribuição de Poisson de parâmetro λ, então a função de probabilidade de X fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $x = 0, 1, \ldots$. Denotamos $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Temos também aqui uma variável aleatória discreta com um número enumerável de valores.

- Valor esperado
  $\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$
- Variância
  $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \lambda$, logo $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{\lambda}$

Distribuição de Poisson

Exemplos

Distribuição de Poisson

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período

Distribuição de Poisson

Exemplos

- n$\underline{o}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$\underline{o}$ de chamadas telefônicas por minuto

Distribuição de Poisson

Exemplos

- n$\underline{o}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$\underline{o}$ de chamadas telefônicas por minuto
- n$\underline{o}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto

Distribuição de Poisson

Exemplos

- n$\underline{o}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$\underline{o}$ de chamadas telefônicas por minuto
- n$\underline{o}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n$\underline{o}$ de pedidos de empréstimno num banco num mês

Distribuição de Poisson

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$^{\underline{o}}$ de chamadas telefônicas por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de pedidos de empréstimno num banco num mês
- n$^{\underline{o}}$ de defeitos num tecido por metro quadrado

Distribuição de Poisson

Exemplos

- n$^{\underline{o}}$ de acidentes numa rodovia num determinado período
- n$^{\underline{o}}$ de chamadas telefônicas por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n$^{\underline{o}}$ de pedidos de empréstimno num banco num mês
- n$^{\underline{o}}$ de defeitos num tecido por metro quadrado
- n$^{\underline{o}}$ de bactérias numa lâmina de microscópio

Distribuição de Poisson

Exemplos

- nº de acidentes numa rodovia num determinado período
- nº de chamadas telefônicas por minuto
- nº de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- nº de pedidos de empréstimno num banco num mês
- nº de defeitos num tecido por metro quadrado
- nº de bactérias numa lâmina de microscópio
- nº de automóveis vendidos numa concessionária num dia

Distribuição de Poisson

Aplicação

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.

Distribuição de Poisson

Aplicação

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Distribuição de Poisson

Aplicação

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,

Distribuição de Poisson

Aplicação

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \mathrm{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,
em que $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$ e $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$.

Distribuição de Poisson

Aplicação

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?.Seja X: número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que $X \sim \text{P}(1,5)$.

Temos que $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$,
em que $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$ e $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$.
Daí obtemos

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,223 - 0,335 = 0,442.$$

Distribuição de Poisson

Aproximação da Binomial para a Poisson

Se $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ então para n grande e p pequeno temos que

Distribuição de Poisson

Aproximação da Binomial para a Poisson

Se $X \sim \text{B}(n, p)$ então para n grande e p pequeno temos que

$$P(X = x) \cong \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},$$

em que $\lambda = np$, $x = 0, 1, \ldots, n$ e $np < 10$.

Outras Distribuições Discretas

Poisson Truncada em Zero

Em certos experimentos de contagem não está previsto a ocorrência de zeros, ou não há interesse em estudar a ocorrência de zeros. Nesses casos pode ser aplicada a Distribuição de Poisson Truncada em Zero.

Outras Distribuições Discretas

Poisson Truncada em Zero

Em certos experimentos de contagem não está previsto a ocorrência de zeros, ou não há interesse em estudar a ocorrência de zeros. Nesses casos pode ser aplicada a Distribuição de Poisson Truncada em Zero. Por exemplo, se o interesse é estudar o número de dias de atraso no pagamento de uma prestação, pode ser de interesse apenas estudar os clientes inadimplentes.

Outras Distribuições Discretas

Poisson com Excesso de Zeros

Em certos experimentos de contagem pode ocorrer um número muito maior de zeros do que o previsto pela distribuição de contagem. Por exemplo, se está sendo estudado o número de dias que uma pessoa consumiu carne, pode haver aqueles que consomem carne mas não consumiram no período da pesquisa. Mas também pode haver aqueles que não consomem carne (zero estrutural).

Outras Distribuições Discretas

Poisson com Excesso de Zeros

Em certos experimentos de contagem pode ocorrer um número muito maior de zeros do que o previsto pela distribuição de contagem. Por exemplo, se está sendo estudado o número de dias que uma pessoa consumiu carne, pode haver aqueles que consomem carne mas não consumiram no período da pesquisa. Mas também pode haver aqueles que não consomem carne (zero estrutural). Nesses casos a probabilidade de ocorrer zero é dividada em dois componentes (um componente referente ao zero estrutural e o outro referente à distribuição de contagem).

Outras Distribuições Discretas

Poisson com Excesso de Zeros

Em certos experimentos de contagem pode ocorrer um número muito maior de zeros do que o previsto pela distribuição de contagem. Por exemplo, se está sendo estudado o número de dias que uma pessoa consumiu carne, pode haver aqueles que consomem carne mas não consumiram no período da pesquisa. Mas também pode haver aqueles que não consomem carne (zero estrutural). Nesses casos a probabilidade de ocorrer zero é dividada em dois componentes (um componente referente ao zero estrutural e o outro referente à distribuição de contagem). Uma distribuição que pode ser utilizada nesses casos é a Distribuição de Poisson com Excesso de Zeros.

Outras Distribuições Discretas

Binomial Negativa

Em muitos experimentos de contagem a variância pode ser muito maior do que a média (fenômeno conhecido como sobredispersão) e assim a distribuição de Poisson não é recomendada. Isso ocorre, por exemplo, quando se estuda o número de sinistros/acidentes.

Outras Distribuições Discretas

Binomial Negativa

Em muitos experimentos de contagem a variância pode ser muito maior do que a média (fenômeno conhecido como sobredispersão) e assim a distribuição de Poisson não é recomendada. Isso ocorre, por exemplo, quando se estuda o número de sinistros/acidentes. Nesses casos uma distribuição muito utilizada é a Distribuição Binomial Negativa em que a variância é maior do que a média.