Coloração de grafos

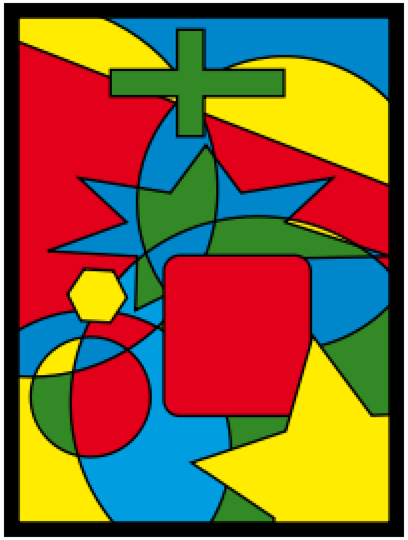
SCC0216 Modelagem Computacional em Grafos

Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

Problema

- Imagine que desejamos colorir um mapa de tal modo que regiões vizinhas não tenham a mesma cor
  1. Como representá-lo como um grafo?
  2. Como decidir a cor de cada região?
     - Atenção: além das regiões vizinhas não terem a mesma cor, queremos minimizar o número de cores usadas

Teorema das 4 cores

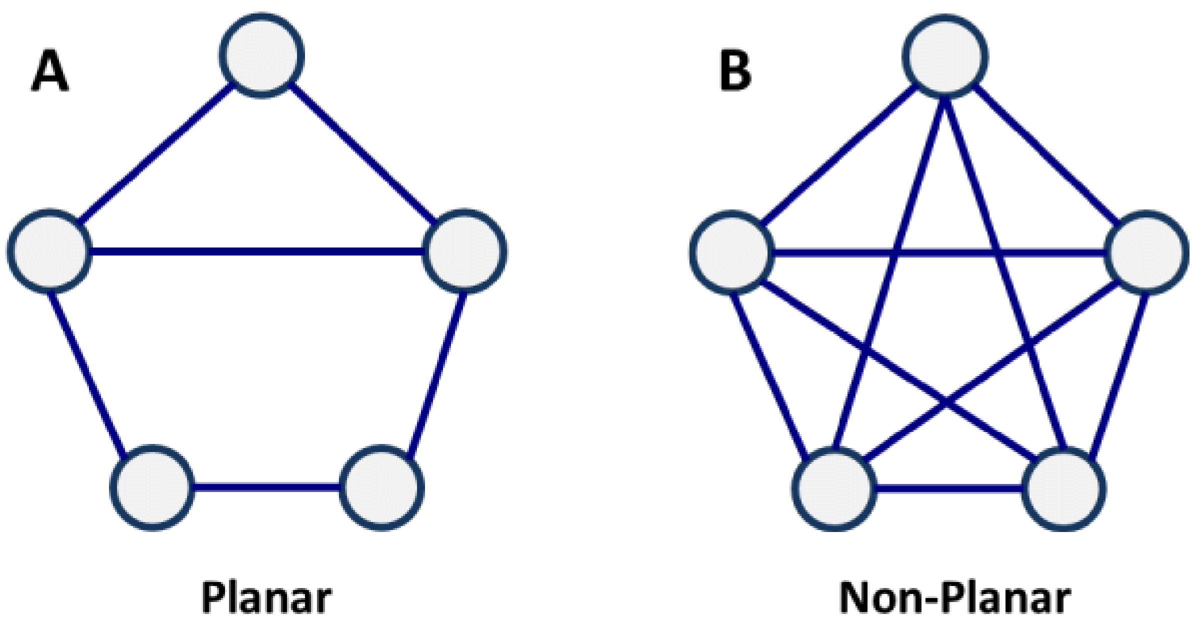


- Formulação simples, demonstração extremamente complexa
  - *Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas*

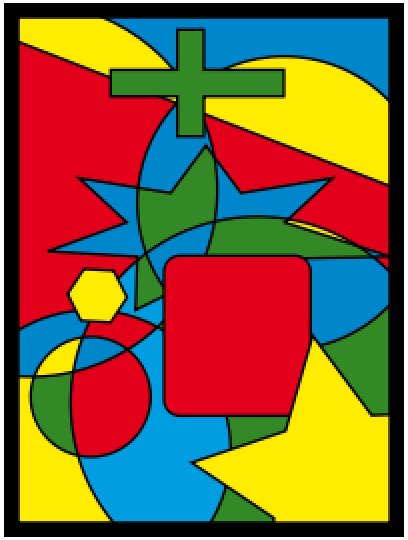
    - Grafo planar: os vértices podem ser dispostos no plano e é possível traçar todas as arestas sem cruzamentos entre elas

    - Atenção: as regiões que se tocam em um único ponto não são consideradas vizinhas

Exemplos



Teorema das 4 cores



- Formulação simples, demonstração extremamente complexa
  - *Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas*
    - Grafo planar: os vértices podem ser dispostos no plano e é possível traçar todas as arestas sem cruzamentos entre elas
    - Atenção: as regiões que se tocam em um único ponto não são consideradas vizinhas

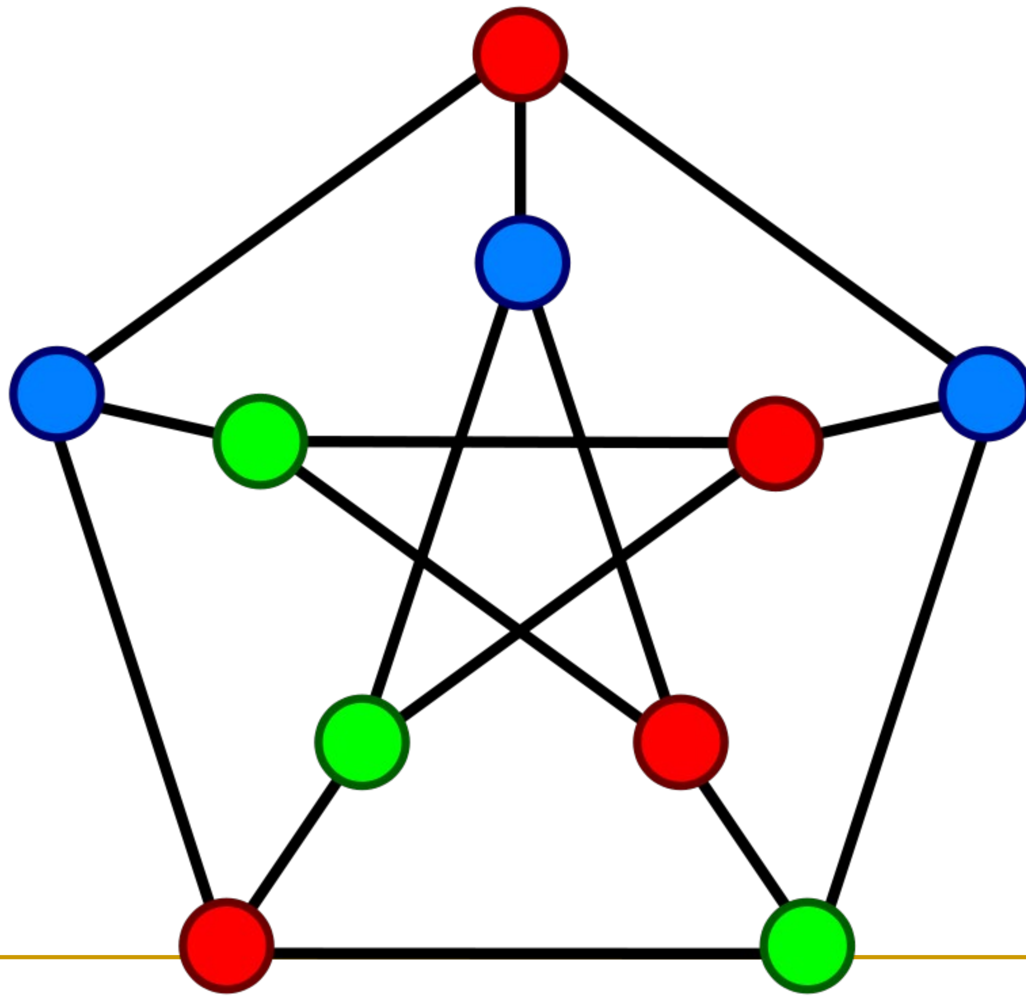
- Considerada a primeira grande prova auxiliada por computador

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_das_quatro_cores

Solução computacional

- Número cromático de um grafo
  - Número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo
    - Atribui cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes têm cores distintas
    - Um grafo que pode ser colorido com *k* cores, é dito k-colorível
    - Em geral, em vez de dar nomes às cores, usamos inteiros para representá-las (1, 2, ..., n)

Exemplo: grafo de Petersen



Solução computacional

- Número cromático de um grafo
  - Número mínimo de cores necessárias para colorir o grafo
    - Atribui cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes têm cores distintas
    - Um grafo que pode ser colorido com *k* cores, é dito k-colorível
    - Em geral, em vez de dar nomes às cores, usamos inteiros para representá-las (1, 2, ..., n)

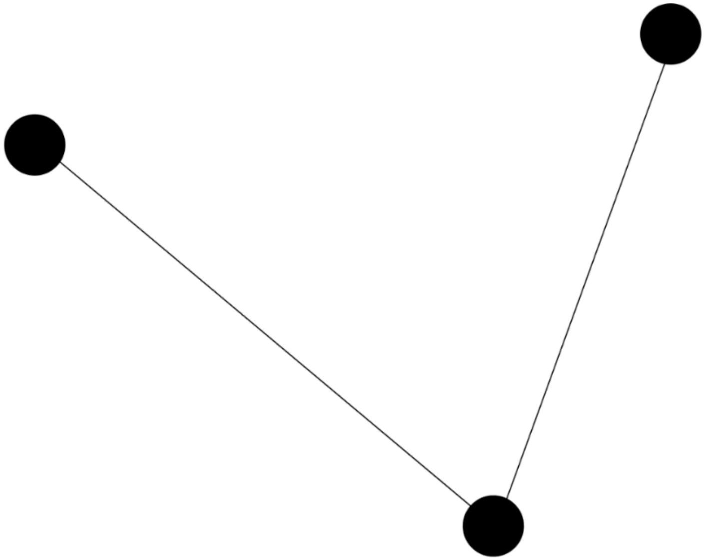
- Não há algoritmos eficientes conhecidos (de tempo polinomial) para encontrar o número cromático de um grafo qualquer
  - Problema da classe NP-completo

Solução computacional

- Força bruta
  - Supondo um grafo com N vértices, e assumindo que temos K cores
  - Pode-se testar todas as K^N alocações de cores!!!
    - Estratégia viável apenas para grafos pequenos

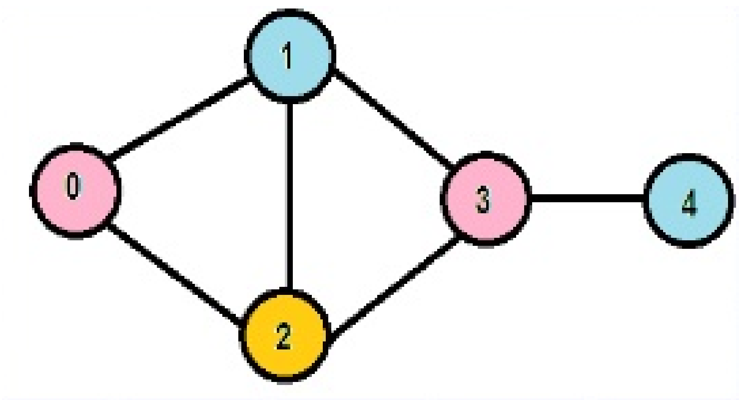
Exemplo: 8 maneiras de atribuir 2 cores a 3 vértices

V_1	V_2	V_3
C_1	C_1	C_1
C_1	C_1	C_2
C_1	C_2	C_1
C_1	C_2	C_2
C_2	C_2	C_2
C_2	C_2	C_1
C_2	C_1	C_2
C_2	C_1	C_1

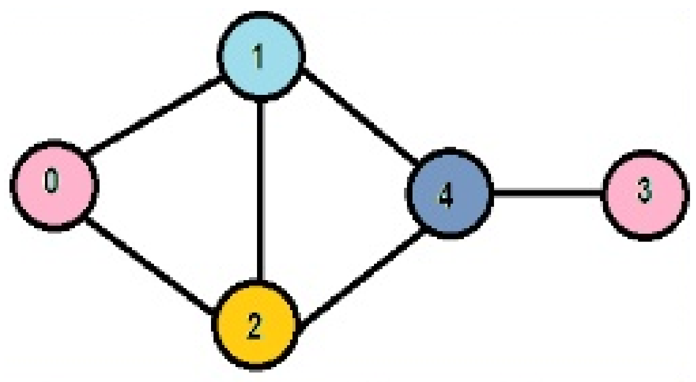


Solução computacional

- Algoritmo guloso simples
  - Escolhe-se um vértice inicial e atribui-se a “menor” cor
  - Para os próximos |V|-1 vértices, seleciona-se mais um vértice (p.ex., o menor disponível, i.e., ainda sem cor alocada) e atribui-se a “menor” cor ainda não usada em algum de seus vizinhos



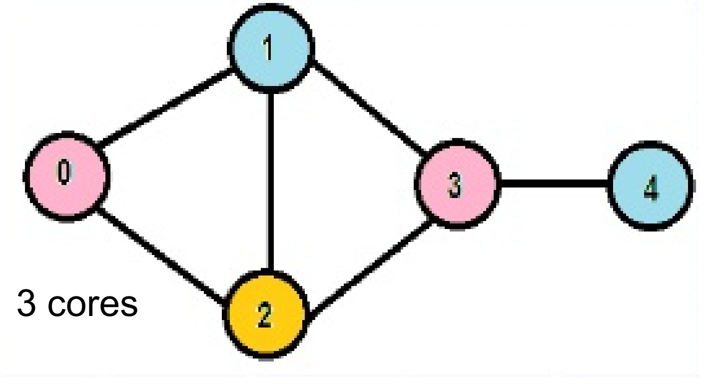
3 cores

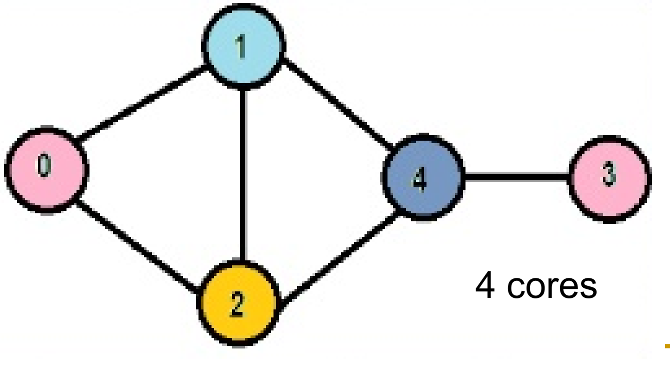


4 cores

Solução computacional

- Algoritmo guloso simples
  - Escolhe-se um vértice inicial e atribui-se a “menor” cor
  - Para os próximos |V|-1 vértices, seleciona-se mais um vértice (p.ex., o menor disponível, i.e., ainda sem cor alocada) e atribui-se a “menor” cor ainda não usada em algum de seus vizinhos
    - Não garante a melhor solução, e a ordem de processamento dos vértices afeta o resultado (no exemplo obtemos resultados diferentes se invertemos a ordem de processamento dos vértices 3 e 4)

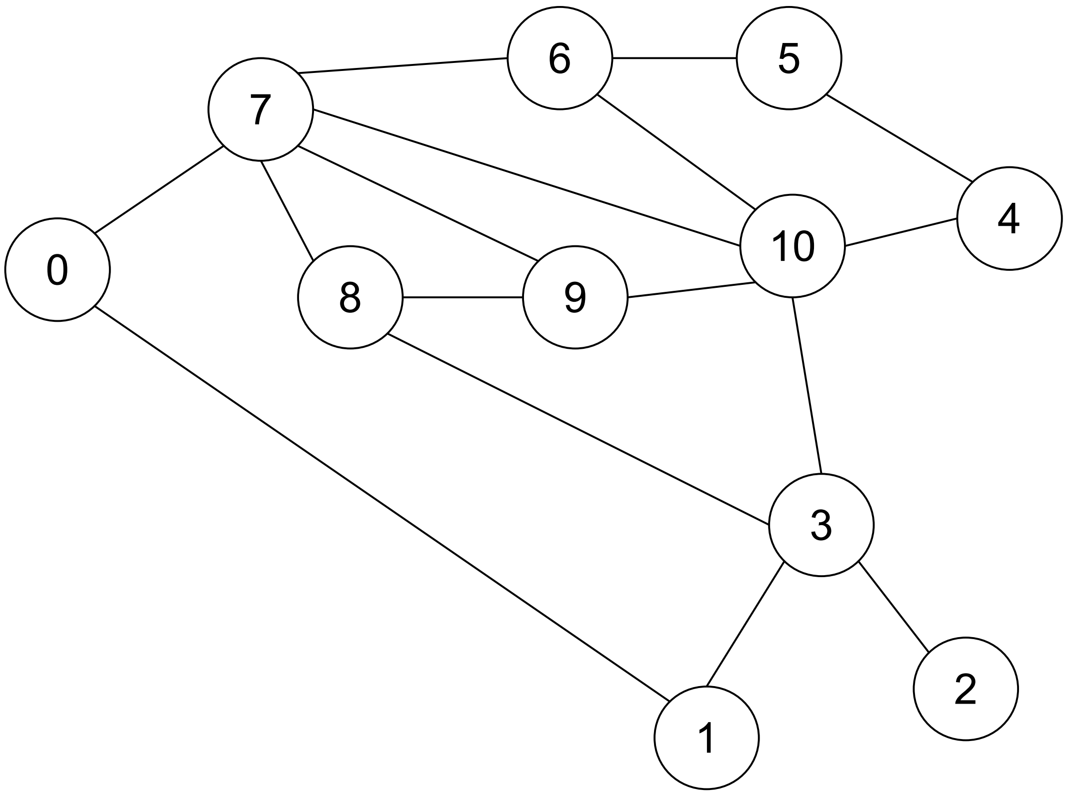




Solução computacional

- Outro algoritmo guloso para coloração de grafo: Welsh-Powell

Exemplo



<u>Vértices ordenados</u>

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

<u>Cor</u>

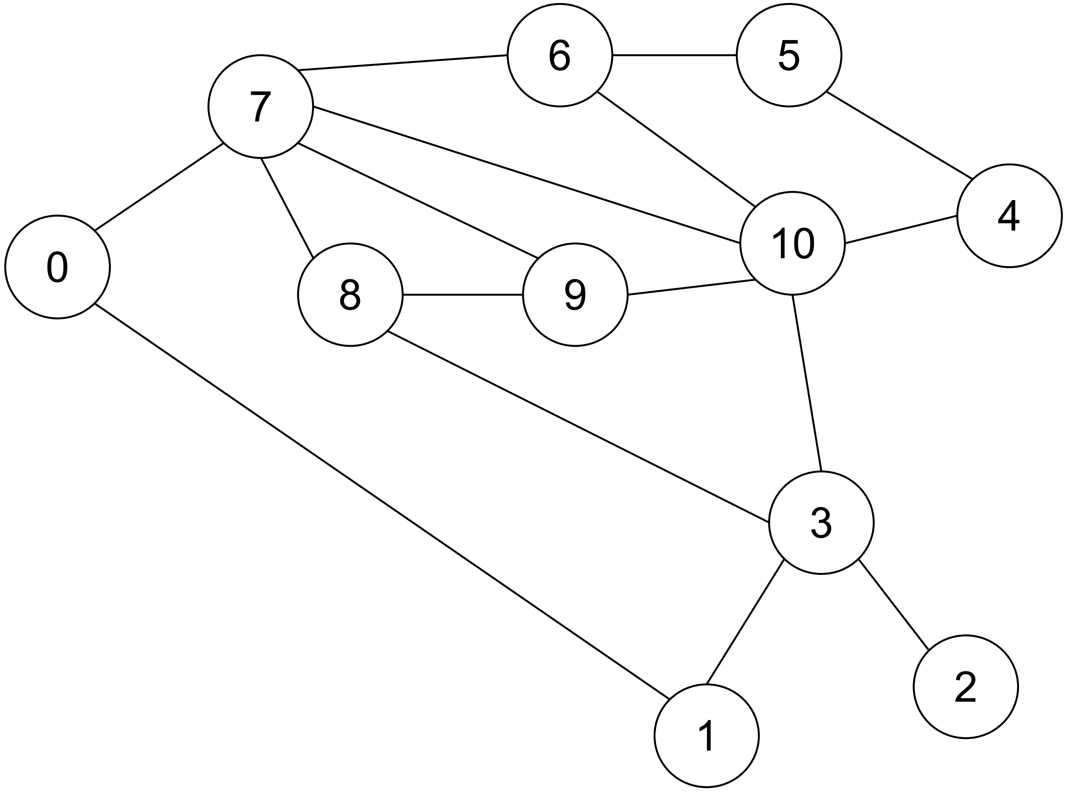
i=1

Solução computacional

- Algoritmo guloso de Welsh-Powell (1975)

1. Marque todos os vértices como incolores
2. Crie uma lista dos vértices do grafo organizados em ordem decrescente de grau
3. Faça contador de cor i = 1
4. Atribua uma cor C_i ao primeiro vértice incolor da lista
5. Percorra o restante da lista de vértices, e atribua a mesma cor C_i ao próximo vértice incolor não adjacente a um vértice anterior da lista de cor C_i
6. Faça i = i + 1
7. Se ainda restarem vértices incolores na lista, volte ao passo 4
8. Imprima o grafo com os vértices coloridos

Exemplo



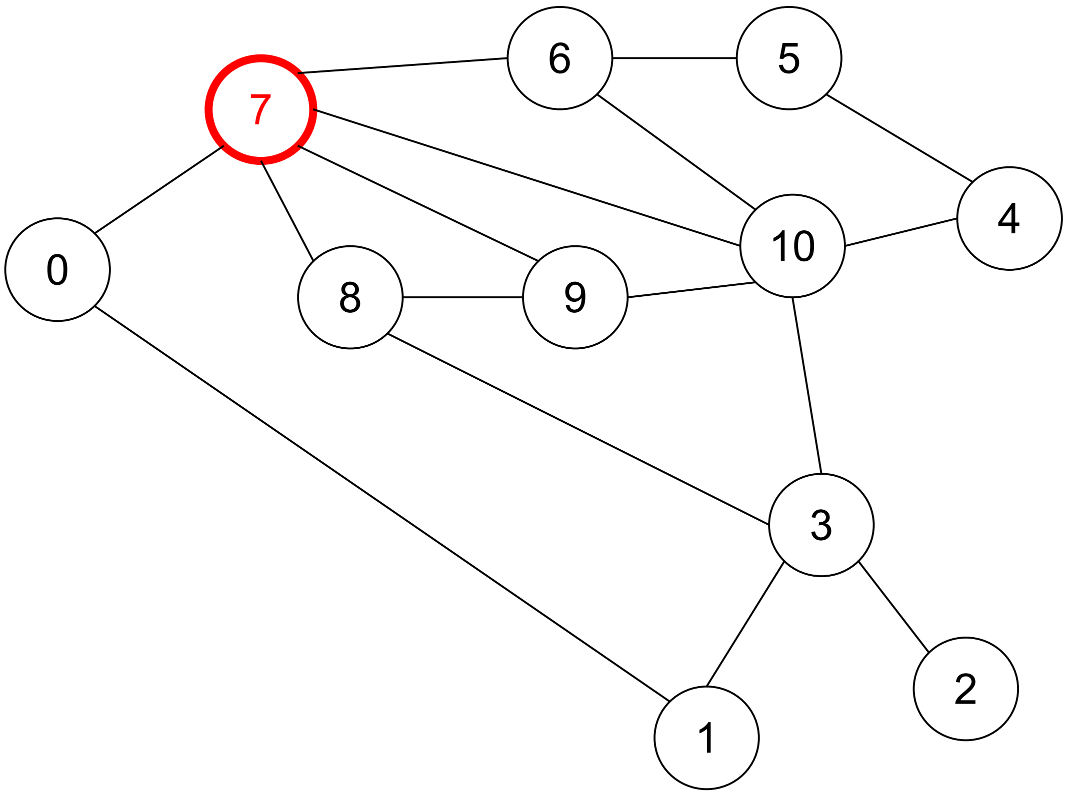
<u>Vértices ordenados</u>

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

<u>Cor</u>

i=1

Exemplo



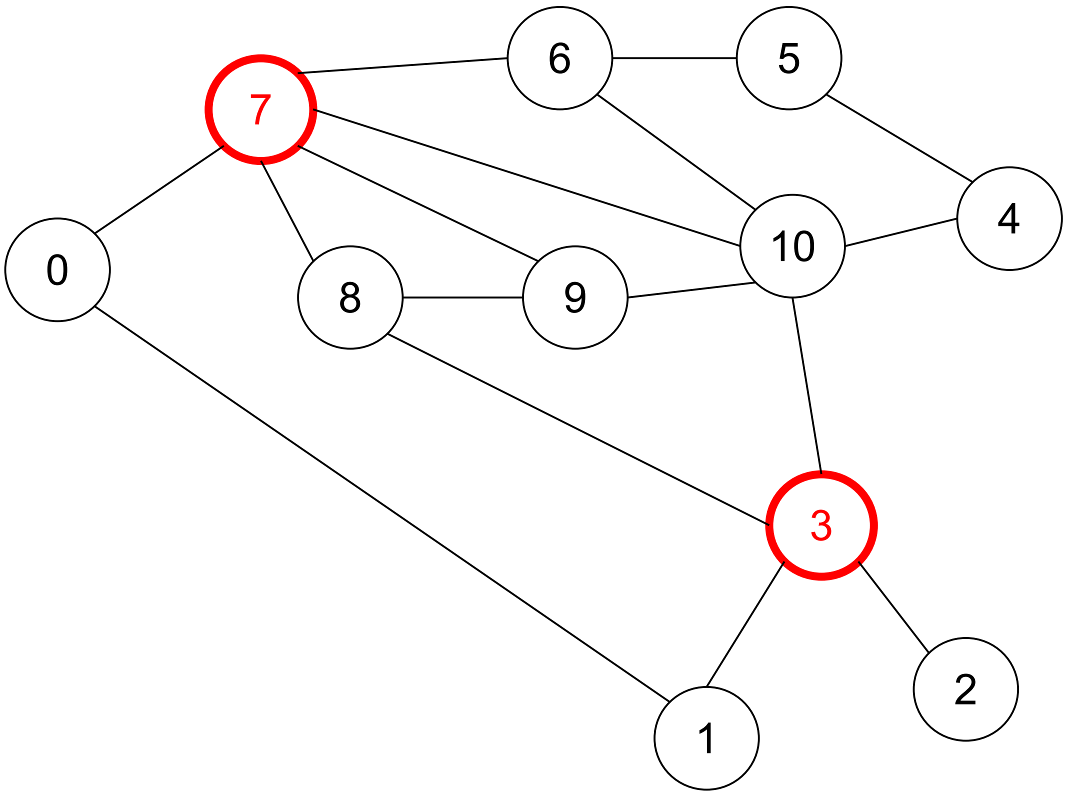
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i=1

Exemplo



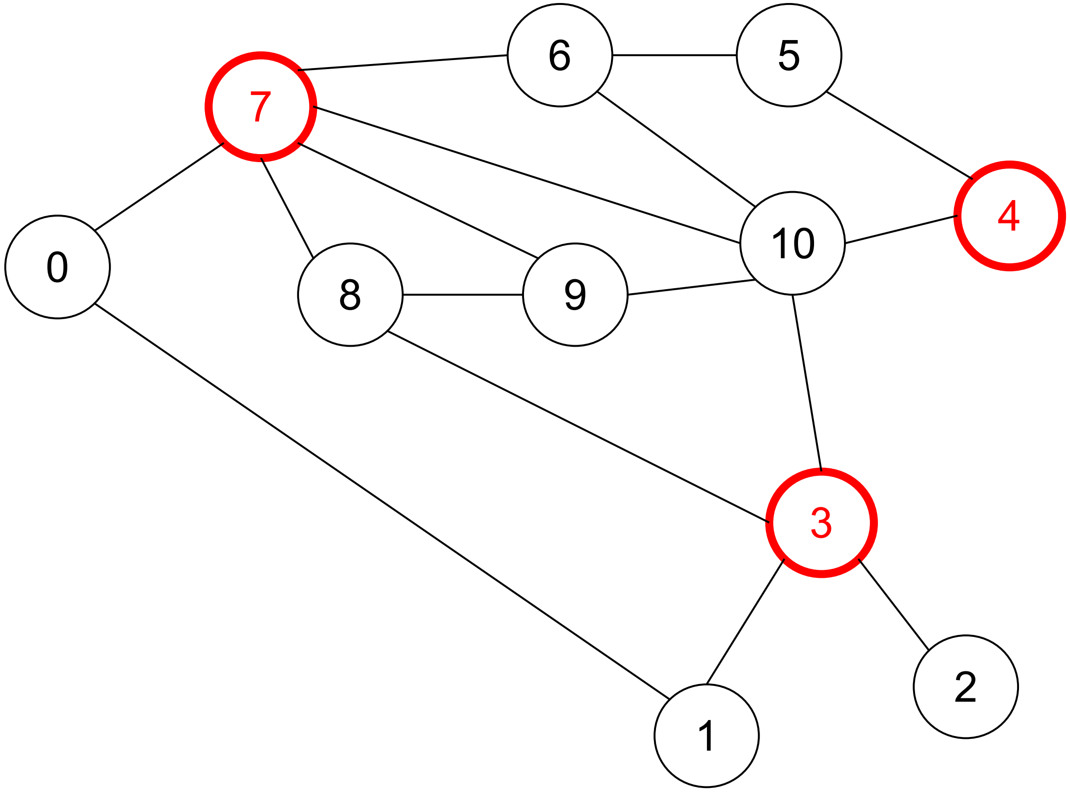
<u>Vértices ordenados</u>

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

<u>Cor</u>

i=1

Exemplo



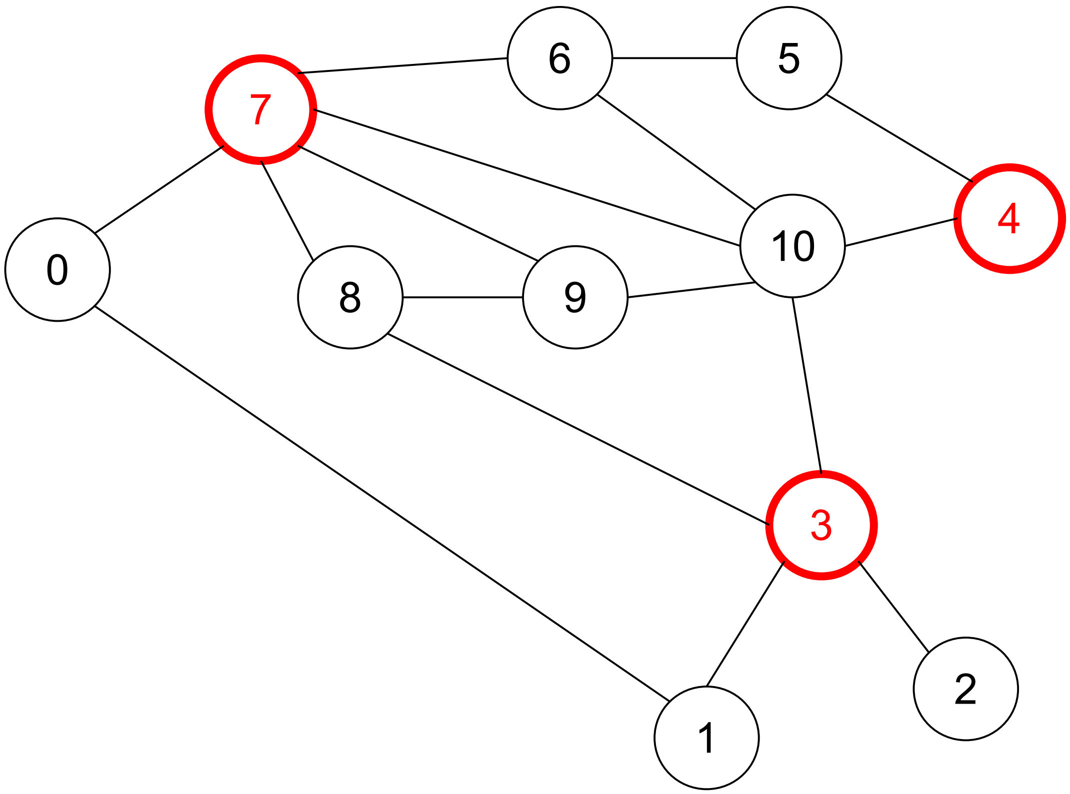
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 1

Exemplo



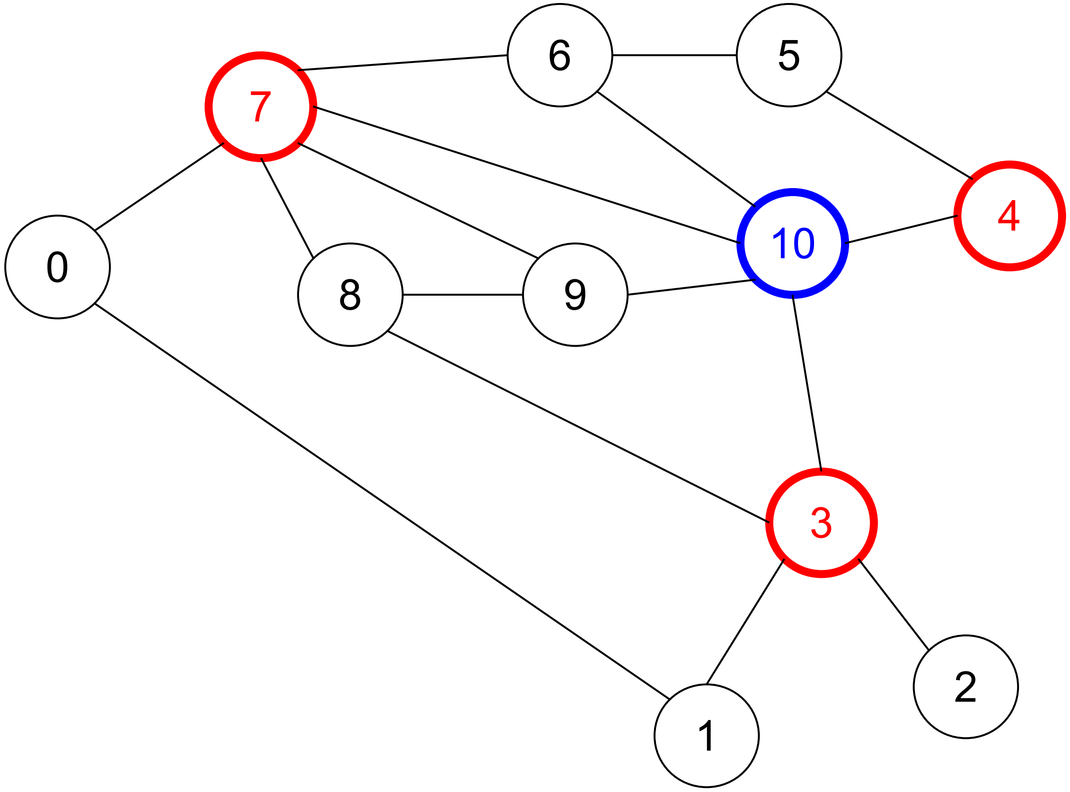
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 2

Exemplo



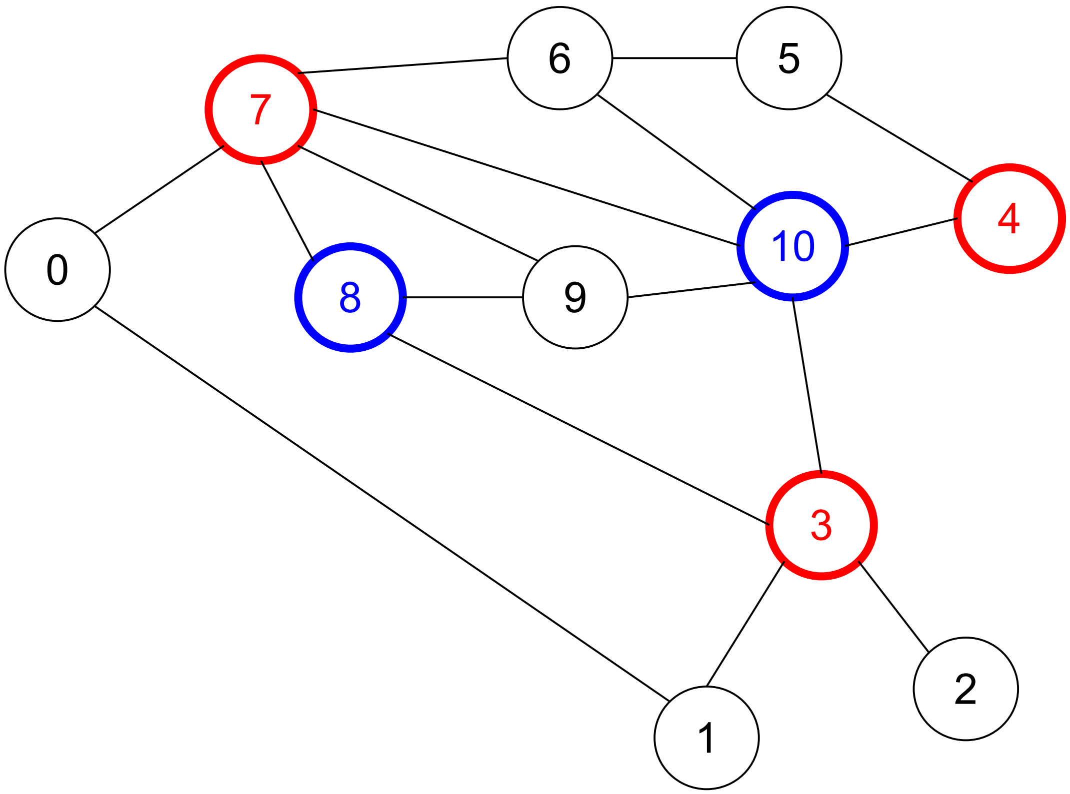
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 2

Exemplo



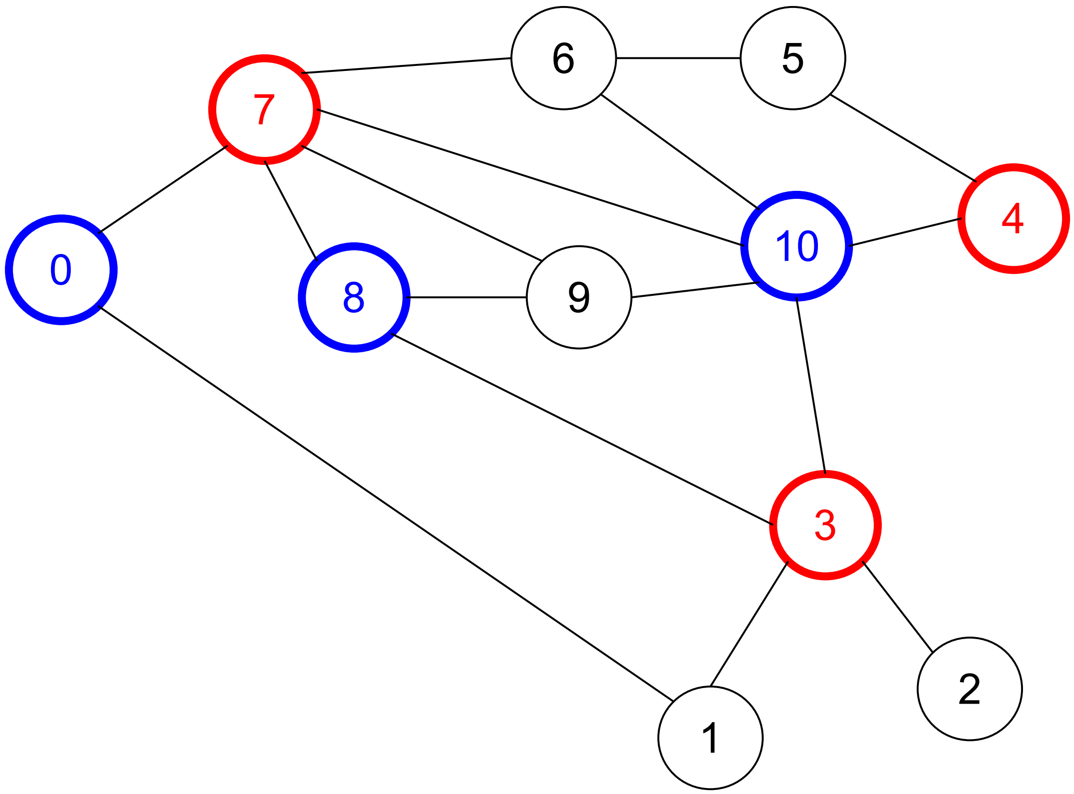
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 2

Exemplo



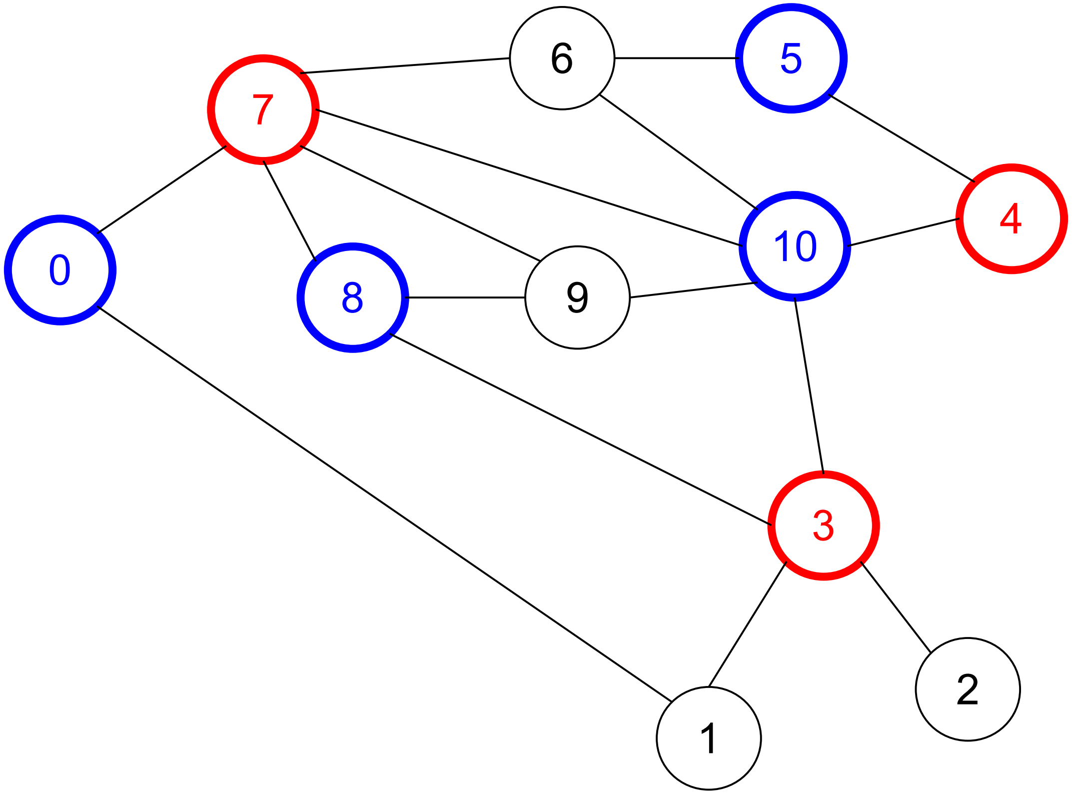
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 2

Exemplo



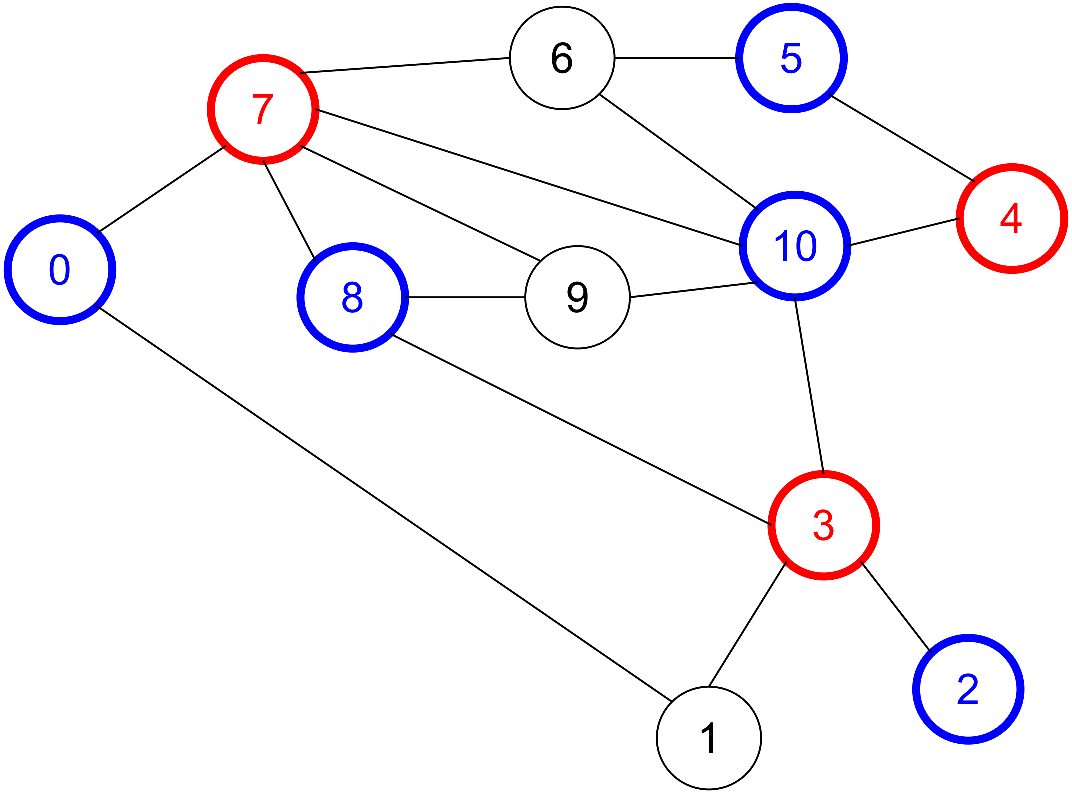
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 2

Exemplo



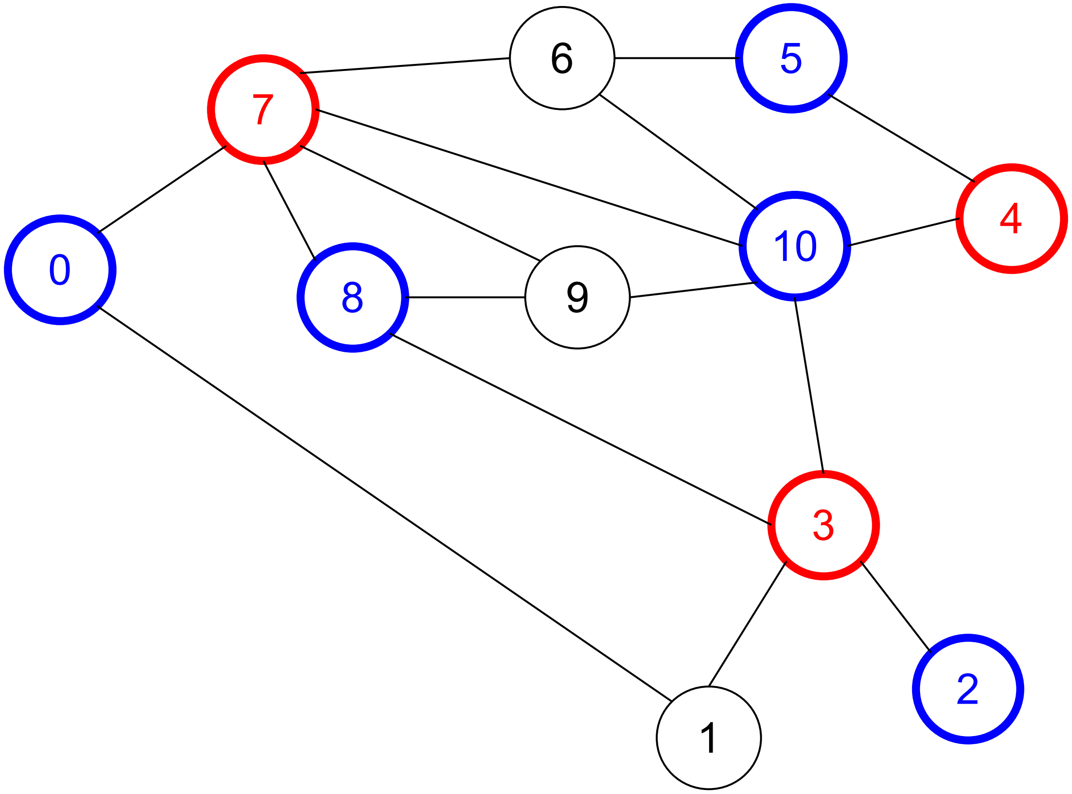
<u>Vértices ordenados</u>

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

<u>Cor</u>

i = 2

Exemplo



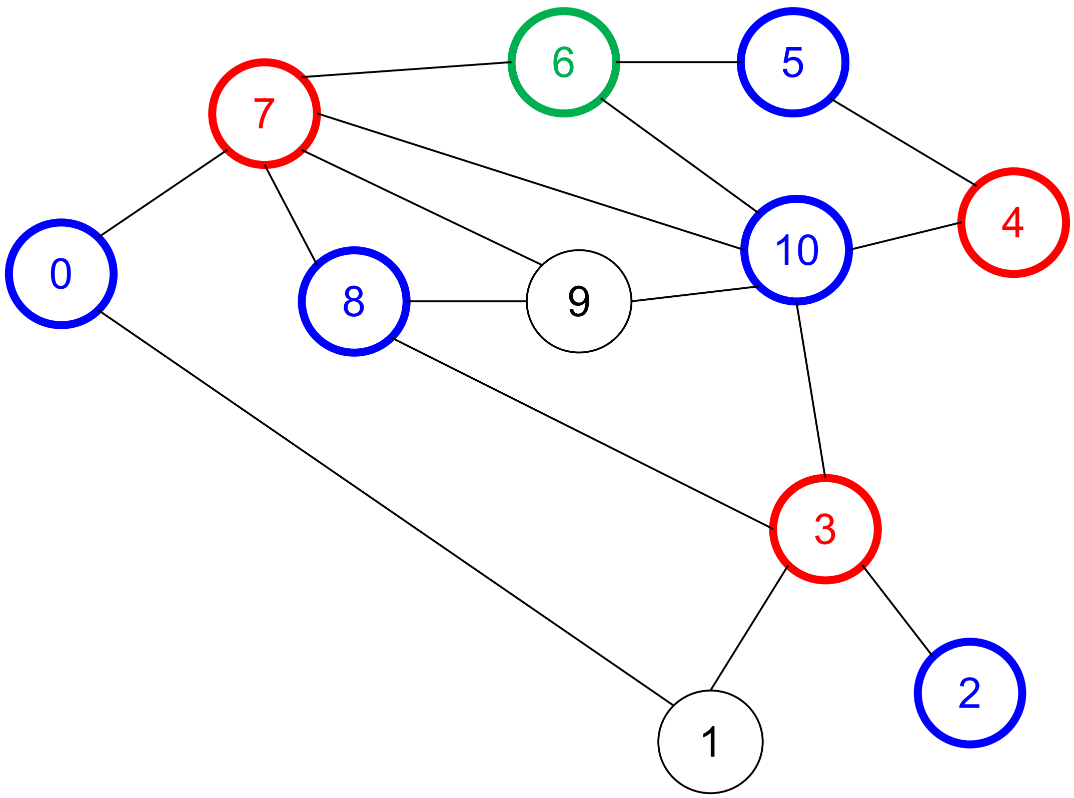
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 3

Exemplo



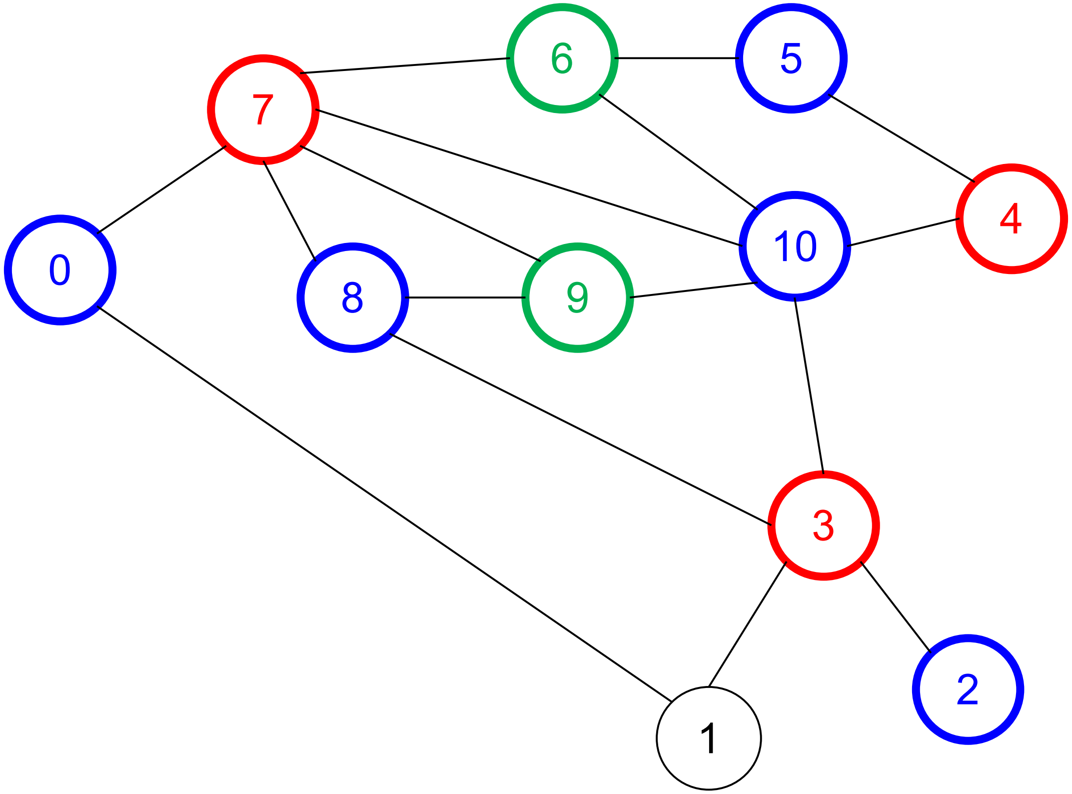
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 3

Exemplo



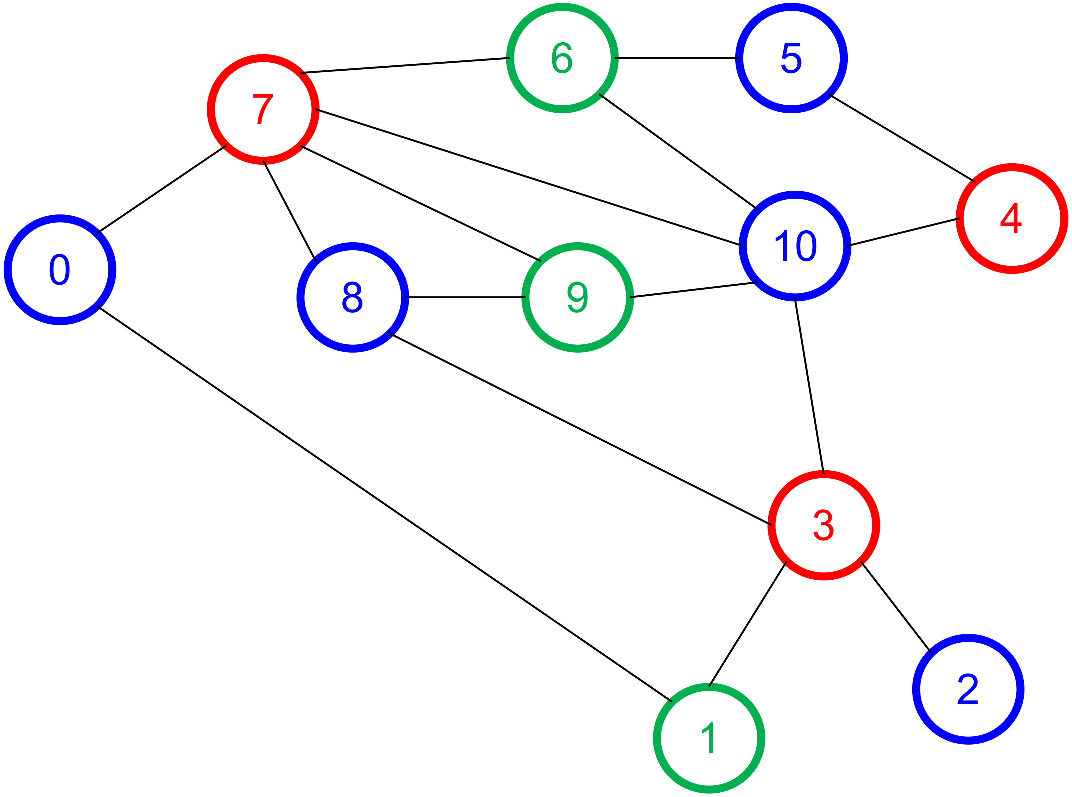
Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 3

Exemplo



Vértices ordenados

d(7) = 5
d(10) = 5
d(3) = 4
d(6) = 3
d(8) = 3
d(9) = 3
d(0) = 2
d(1) = 2
d(4) = 2
d(5) = 2
d(2) = 1

Cor

i = 3

Fim!

IMPLEMENTAR

- Algoritmo guloso de Welsh-Powell (1975)

1. Marque todos os vértices como incolores
2. Monte uma lista de vértices do grafo organizados em ordem decrescente por grau
3. Faça contador de cor i=1
4. Atribua uma cor C_i ao primeiro vértice incolor da lista
5. Percorra o restante da lista e atribua a mesma cor C_i ao próximo vértice incolor não adjacente a um vértice anterior da lista de cor C_i
6. Faça i = i + 1
7. Se ainda restarem vértices incolores na lista, volte ao passo 4
8. Imprima o grafo com os vértices coloridos

Questão

- Qual a complexidade da sua função implementada?

Aplicações

- Vários problemas podem ser modelados como um problema de coloração de grafo, p.ex.
  - Determinação de frequências para alocar a estações de rádio próximas, evitando interferências entre elas
  - Alocação otimizada de um grande número de variáveis aos registradores de um processador (compiladores)
  - Planejamento de reuniões de comissões com participantes em comum
  - Etc.

Exercício

- Como organizar os 16 alunos abaixo para fazer as provas que devem? Quantos horários/slots de aulas diferentes são necessários?
  - Por exemplo, o aluno 1 tem que fazer as provas de Matemática e Português

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X							
História			X							X				X		X
Física			X		X							X	X			
Química		X						X	X					X		
Biologia		X				X					X		X			

Exercício

- Como organizar os 16 alunos abaixo para fazer as provas que devem? Quantos horários/slots de aulas diferentes são necessários?

  - Provas de disciplinas com alunos em comum não devem ser alocadas no mesmo horário!

  - Como modelar esse problema como um grafo?

Exercício

- Como organizar os 16 alunos abaixo para fazer as provas que devem? Quantos horários/slots de aulas diferentes são necessários?
  - Cada vértice é uma disciplina, vértices são ligados se há alunos em comum para fazer a prova da disciplina
  - Vértices vizinhos não devem receber a mesma cor!
    - i.e., provas de disciplinas com alunos em comum não devem ser alocadas no mesmo horário
  - Quantas cores (horários) são necessárias?

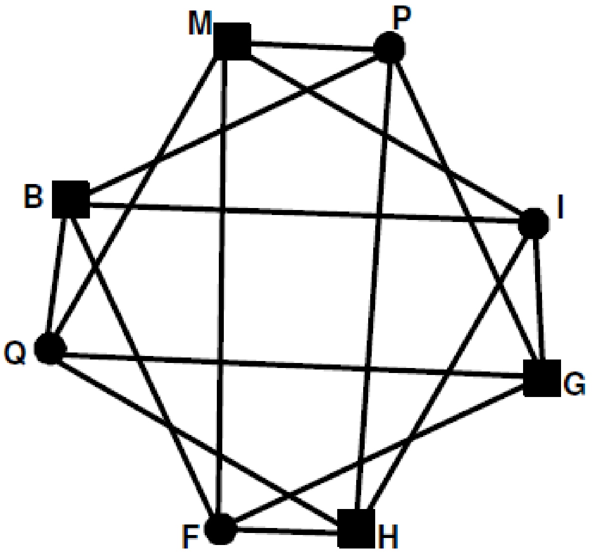
Exercício

- Como organizar os 16 alunos abaixo para fazer as provas que devem? Quantos horários/slots de aulas diferentes são necessários?
  - 2 horários bastam!

    - Cada vértice é uma disciplina
    - Vértices conectados se há alunos

    em comum para fazer a prova

    - Duas cores bastam!
      - Cores representadas por quadrado e círculo, nesse caso



Sudoku

- Quebra-cabeça
  - Primeira aparição em 1979
  - Não pode repetir números nos blocos, linhas e colunas

    - **Como resolver esse problema com coloração de grafos?**

5						2	3	
				4	8	9	7	
	8				3			
1			3	8	9	7	4	
				5	6			
8	9							
	4						6	7
6	2		8	3				1
	5	1		6			2	

➔

5	1	4	6	9	7	2	3	8
2	3	6	1	4	8	9	7	5
7	8	9	5	2	3	6	1	4
1	6	5	3	8	9	7	4	2
4	7	3	2	5	6	1	8	9
8	9	2	4	7	1	3	5	6
3	4	8	9	1	2	5	6	7
6	2	7	8	3	5	4	9	1
9	5	1	7	6	4	8	2	3

Sudoku: só para os fortes!

- Borges, S.; Lima, T.; Marques, V. (2016). Coloração de Grafos Aplicado na resolução do Sudoku. II Encontro Potiguar de Jogos, Entretenimento e Educação, pp. 1-11.