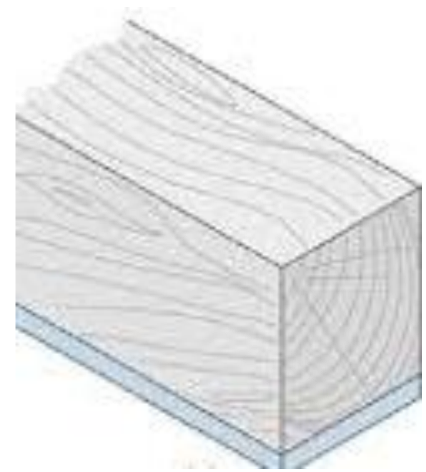
DEPARTAMENTO DE ENGEHARIA NAVAL E OCEÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

Análise de Vigas compostas (σ_x)



PNV 3212 – Mecânica Dos Sólidos I

2020

Agenda

- Motivação
- Cálculo de tensões normais σ_x
  - Teoria de Euler-Bernoulli

Motivação

- Projeto/Análise dos elementos estruturais (Vigas compostas)
  - Distribuição de tensões(Normal)

- Reduzir peso
- Aumentar resistência (corrosão, mecânica)

Literatura

Google

vigas compostas

Todas | Imagens | Shopping | Vídeos | Notícias | Mais | Configurações | Ferramentas

Aproximadamente 179.000 resultados (0,43 segundos)

Vídeos

Flexão Vigas Compostas

Responde Aí
YouTube - 9 de fev. de 2018

EXERCÍCIO RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - FLEXÃO ...

Engenharia Acadêmica
YouTube - 9 de mai. de 2017

Resolução de exercício de flexão composta

Autor Univesp
YouTube - 6 de jun. de 2016

www.professores.uff.br › salete › uploads › sites › 2017/08 › aula12 ▾ PDF

Tensões em Vigas – Tópicos Avançados Vigas compostas

de S SOUZA - Artigos relacionados

Entretanto, a linha neutra não passa pelo centróide da seção transversal, no caso da **viga** ser **composta** por dois materiais diferentes. Figura 3 – (a) **Viga** ...

Você visitou esta página em 02/04/20.

www.respondeai.com.br › mecanica-e-resistencia-dos-materiais › flexao

Vigas Compostas | Resumo e Exercícios Resolvidos

Tensões de Flexão

- **Hipóteses**
  - Problema é independente do tempo.
  - O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões (**Esbelta**).
  - A viga é constituída de um material **linearmente elástico**.
  - O efeito Poisson é negligenciável.
  - A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical.
  - Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares ao eixo deformado depois da deformação (**Navier**).
  - O ângulo de rotação da seção transversal é muito pequeno.
  - O efeitos de momento de inércia da rotação é desprezado.
  - **Flexão Pura.**

Tensões de Flexão

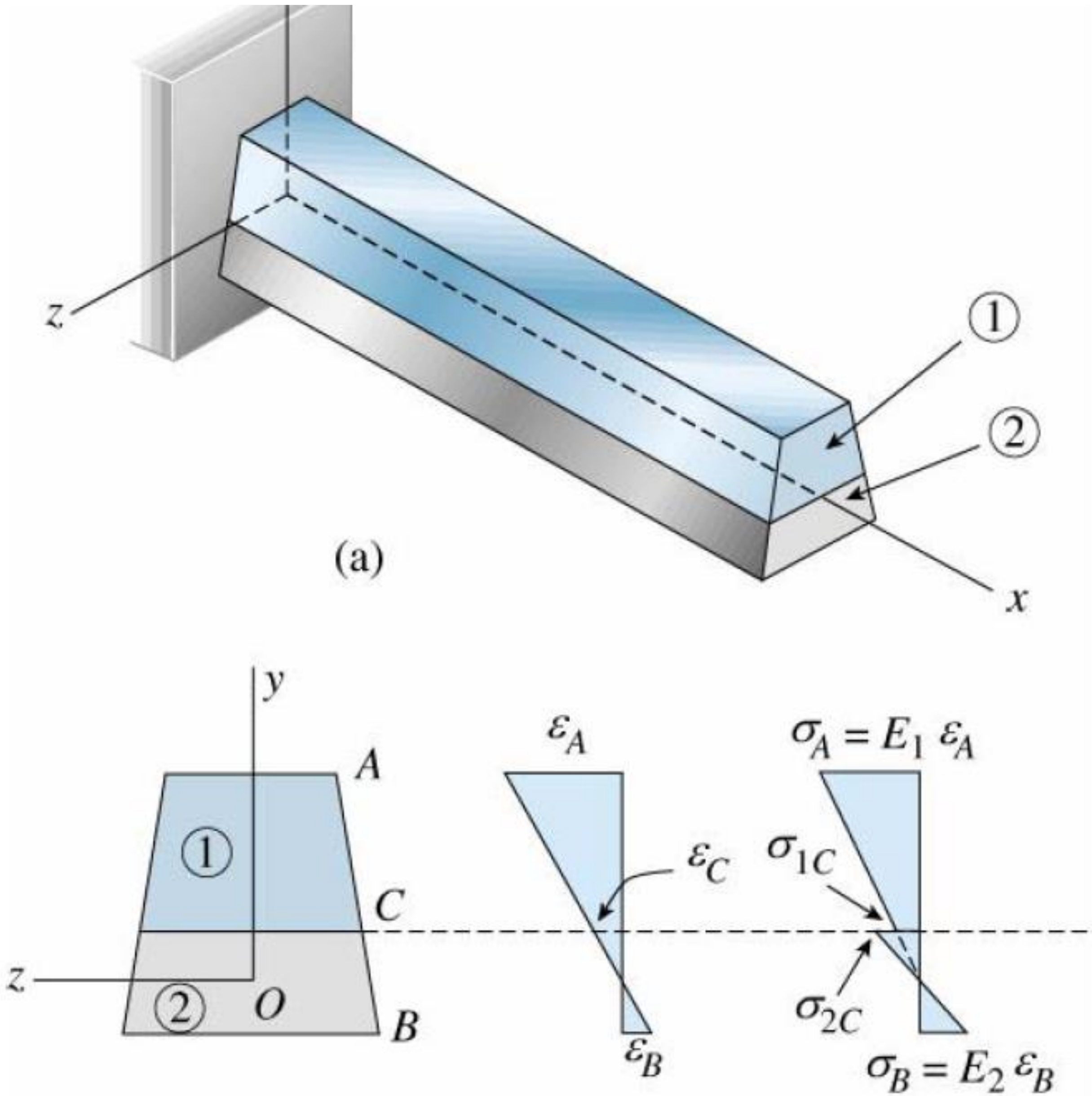
- **Objetivo**
  - Relacionar

$$
\begin{tikzcd}
\text{Carregamento}\left\{ M(x) \right. \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \left. A(x), I(x) \right\} \text{Propriedades da seção transversal} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \sigma(x) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$\sigma(x) \sim M(x) \qquad \sigma(x) \sim \frac{1}{\overline{{\color{red}E}I}}$$

$$[\sigma(x)]_i \sim {\color{red}E}_i \frac{M(x)}{\overline{{\color{red}E}I}(x)}$$

Tensões de Flexão



Tensões de Flexão

- **Objetivo**
  - Relacionar

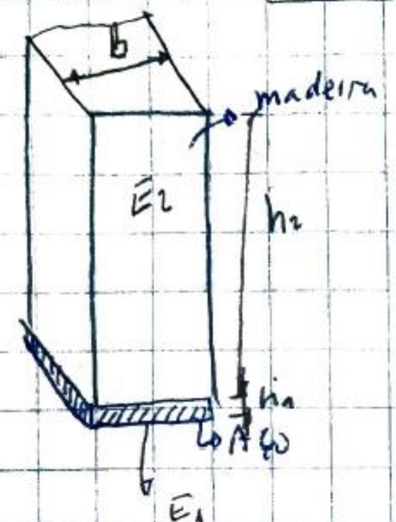
$$
\begin{tikzcd}
\text{Carregamento}\ \left\{ M(x) \right. \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \left. \mathrm{A}(x), I(x) \right\}\ \begin{array}{l}\textbf{Propriedades da}\\ \textbf{seção transversal}\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \sigma(x) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
& &
\end{tikzcd}
$$

$$\sigma(x) \sim M(x) \qquad \sigma(x) \sim \frac{1}{\overline{EI}}$$

$$[\sigma(x)]_i \sim E_i \frac{M(x)}{\overline{EI}(x)}$$

Tensões de Flexão

VIGAS COMPOSTAS → ex: AÇO / MADEIRA ou AÇO / CONCRETO



$E_1 > E_2$ → $n = \frac{E_1}{E_2}$ → $\boxed{n>1}$

⇓

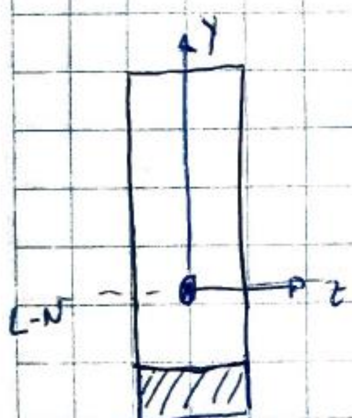
LINHA NEUTRA ($\sigma = 0$) NÃO PASSA PELO CENTRÓIDE DA SEÇÃO

↓

DETERMINAR POSIÇÃO L-N

↓

hipótese de Navier é válida.



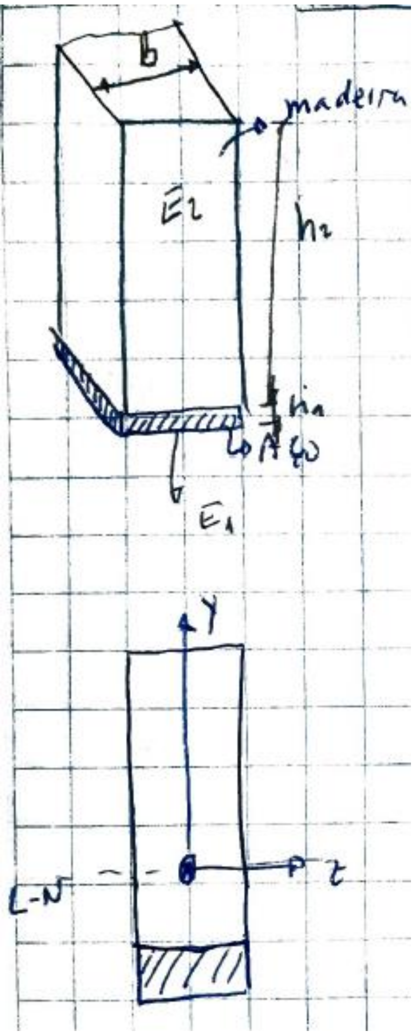
$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ $\qquad \frac{1}{\rho} = K$ = curvatura da viga.

κ

↓

Para resposta linear-elástica lei de Hooke é válida.

Tensões de Flexão



$\sigma_1 = \varepsilon E_1$

$\sigma_2 = \varepsilon E_2$

$\varepsilon \rightarrow$ varia linearmente e de forma contínua na seção.

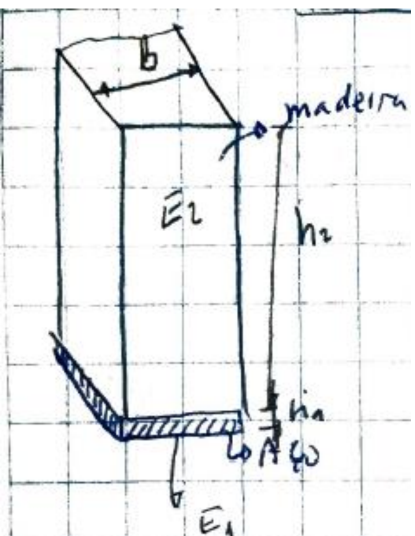
Na sup. contato dos materiais a deformação é a MESMA.

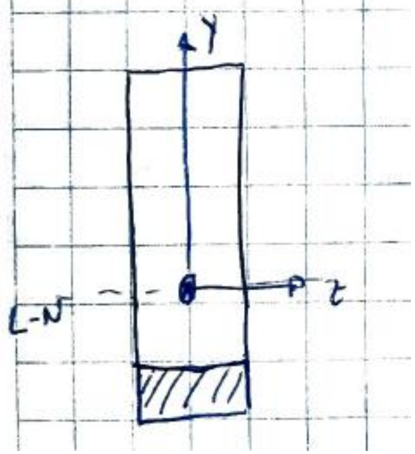
$\sigma_1 = E_1 K y \qquad \sigma_2 = E_2 K y$

$\Downarrow$

$\Sigma F_x = 0$ ← não há força normal externa, resultante das tensões deverá ser nula.

Tensões de Flexão





$$F_1 + F_2 = 0$$

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{A_1} E_1 K y\, dA + \int E_2 K y\, dA = 0 \qquad \div K \; ; K \neq 0$$

$$E_1 \int_{A_1} y\, dA + E_2 \int_{A_2} y\, dA = 0$$

$$\int_{A_1} y\, dA = Q_1 \qquad \int_{A_2} y\, dA = Q_2$$

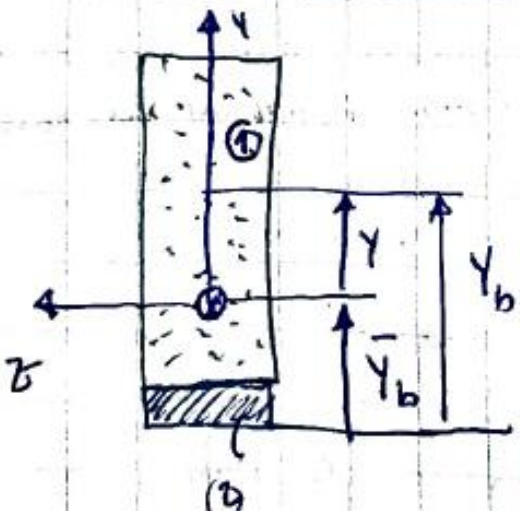
$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0} \quad (1)$$

Permite determinar a posição do eixo neutro. Soma dos momentos estáticos ponderado pelos módulos de elasticidade vale zero

Tensões de Flexão

PARA O CASO DE 2 MATERIAIS



DISTÂNCIA ATÉ O CENTRÓIDE DA SEÇÃO ASSOCIADA AO MAT. Ei DESDE O FUNDO

$$Y = Y_b - \bar{Y}_b$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \sigma_x = -\frac{E}{\rho} Y$$

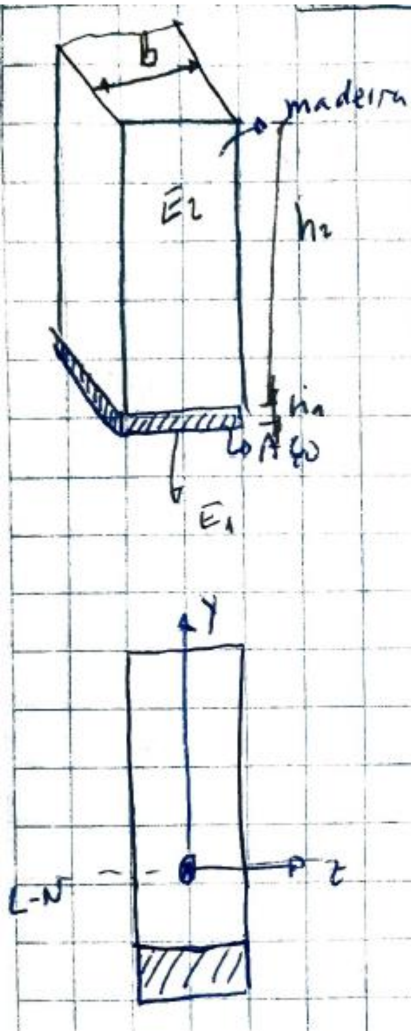
$$F_x = \int_A \sigma_x \, dA = -\int_A k E_i y \, dA = 0$$

$E_i = f(A)$ ← NÃO SAI DA INTEGRAL

$$-k\int_A (Y_b - \bar{Y}_b) E_i \, dA = 0 \rightarrow -k\int_A E_i Y_b \, dA + k\int_A \bar{Y}_b E_i \, dA = 0$$

$\bar{Y}_b$ = constante → $\bar{Y}_b = \dfrac{\int_A E_i Y_b \, dA}{\int_A E_i \, dA}$

Tensões de Flexão



Conhecida a posição da linha neutra

↓

Equilíbrio de Momentos

$$M_1 + M_2 = M_{ext}(x)$$

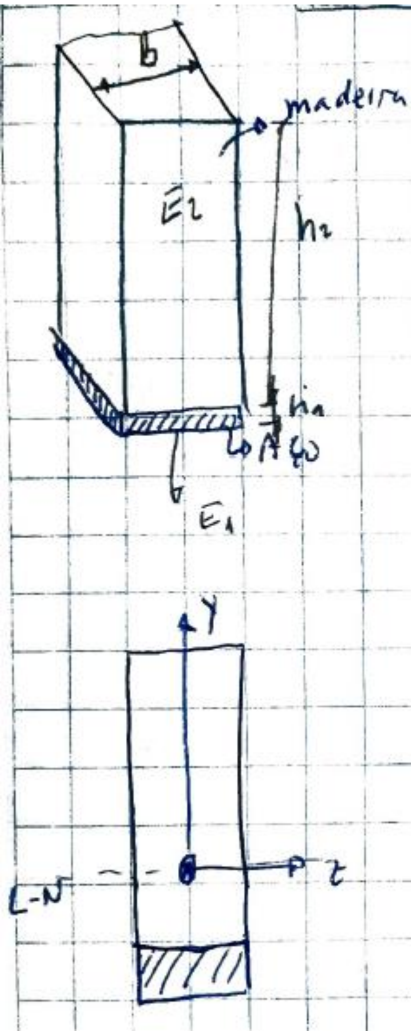
$$\int_{A_1} y\,(\sigma_1 dA) + \int_{A_2} y\,(\sigma_2 dA) = M_{ext}(x)$$

$$\int_{A_1} y\, E_1 K y\, dA + \int_{A_2} y\, E_2 K y\, dA = M_{ext}(x)$$

$$E_1 K \underbrace{\int_{A_1} y^2 dA}_{I_1} + E_2 K \underbrace{\int_{A_2} y^2 dA}_{I_2} = M_{ext}$$

I_2 → momento de inércia em relação ao centroide da área composta

Tensões de Flexão



CURVATURA DA VIGA COMPOSTA NA SEÇÃO X.

$$K = \frac{M_{ext}(x)}{E_1 I_1 + E_2 I_2}.$$

. governa a deformação da viga. $\varepsilon = Ky$

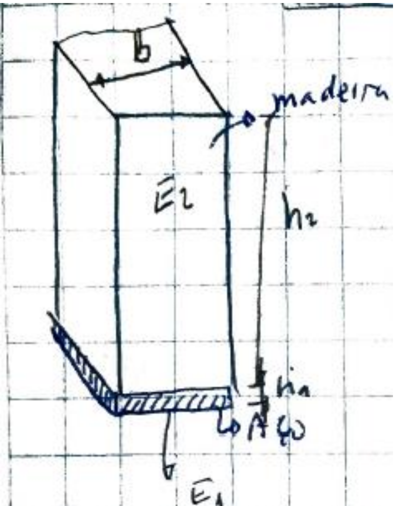
. é uma medida de quão intensamente a viga é flexionada.

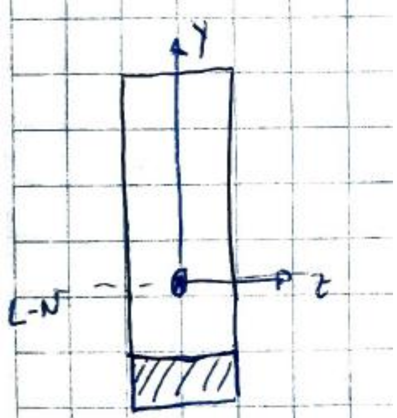
carga pequena na viga $\Rightarrow$ viga quasi reta $\Rightarrow$ raio de curvatura grande (ρ)

$\Downarrow$

curvatura pequena

Tensões de Flexão





TENSÕES NA VIGA

κ

$$\sigma_1 = E_1 \kappa y \rightarrow \sigma_1 = E_1 \left(\frac{M(x)}{E_1 I_1 + E_2 I_2}\right) y$$

ε_x

$$\sigma_2 = E_2 \kappa y \rightarrow \sigma_2 = E_2 \left(\frac{M(x)}{E_1 I_1 + E_2 I_2}\right) y.$$

Seção Homogeneizada

(dimensões horizontais são multiplicadas pela relação $n = \frac{E_1}{E_2}$)

↳ Dimensão paralela ao eixo neutro

$n = \frac{E_1}{E_2}$ (seção transformada do madeira)

E_1 = aço

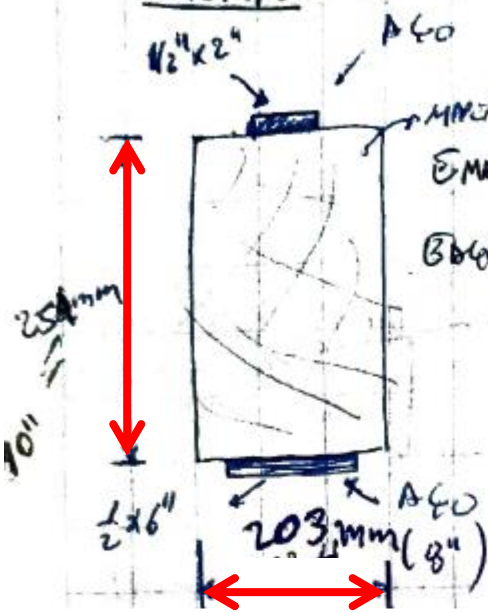
E_2 = madeira

$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 = 0 \rightarrow n Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sigma_{mad} = E_2 \left(\frac{M}{n I_1 + I_2}\right) y \qquad \sigma_{aço} = n\, \sigma_{mad}$$

Exemplo

EXEMPLO



$E_{MAD} = 8300$ MPa

$E_{AÇO} = 206000$ MPa

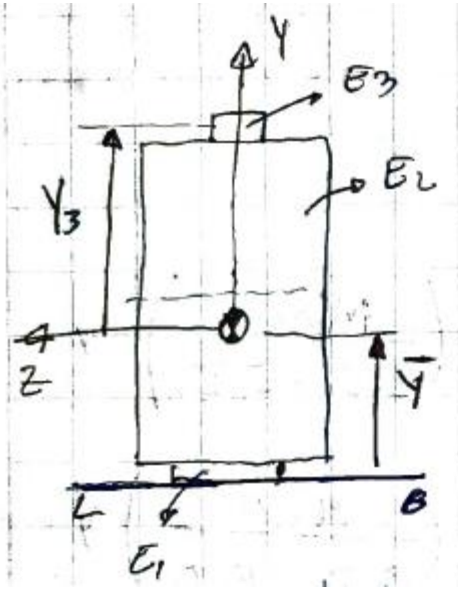
Determine o momento fletor permissível?

Dados

$\sigma_{admissível}^{aço} = 140$ MPa

$\sigma_{adm}^{mad} = 10$ MPa.

Exemplo



CENTROIDE DA SEÇÃO COMPOSTA.

(PONDERADO PELO MÓDULO)

medido desde linha base

$$\bar{Y} = \frac{\int_A E_i Y_b \, dA}{\int E_i \, dA}$$

CENTROIDE

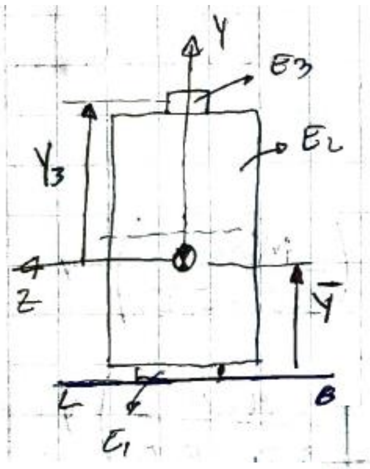
$\boxed{E_3 = E_1}$

$$E_1 Q_1 + E_2 Q_2 + E_3 Q_3 = 0$$

$$Q_i = A_i^* y_i^*$$

DISTÂNCIA DA CN ATÉ O CENTROIDE DA ÁREA A.

Exemplo



$$\bar{Y}_b = \frac{\int_A E_i y_b dA}{\int_A E_i dA}$$

$*(1/2 \times 2)$

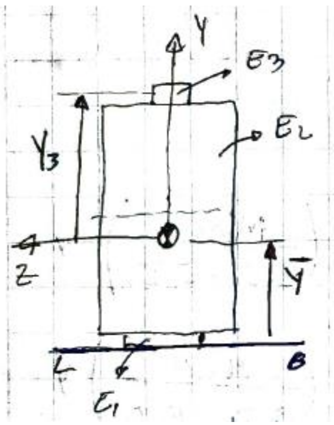
$$\bar{Y}_b = \frac{E_1 \times (1/4)(1/2 \times 6) + E_2 (5 + 0{,}5)(10 \times 8) + E_1 (1/2 + 10 + 1/4)}{E_1 (1/2 \times 6) + E_2 (10 \times 8) + E_1 (1/2 \times 2)}$$

$$\bar{Y}_b = \frac{(1/4)(3) + \frac{E_2}{E_1}(5{,}5)(80) + (10{,}75)(1)}{3 + \frac{E_2}{E_1} \times 80 + 1} \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{8300}{206 \times 10^3} \cong 0{,}04$$

$$\bar{Y}_b = \frac{3/4 + 0{,}04 \times 440 + 10{,}75}{3 + 0{,}04 \times 80 + 1} \rightarrow \bar{Y}_b = \frac{3/4 + 17{,}6 + 10{,}75}{4 + 3{,}2}$$

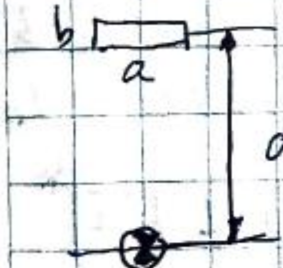
$\bar{Y}_b \cong 4{,}04$ inches ($102{,}6$ mm)

Exemplo



RIGIDEZ FLEXIONAL EQUIVALENTE

$$(EI)^* = \int_{A_i} E_i\, y^2\, dA = \sum \left(I_{\substack{centroide \\ próprio}} + Ad^2 \right)$$

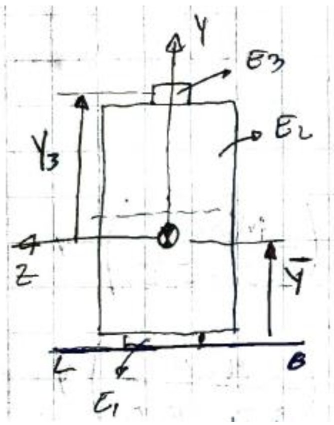


$$\to I_{\otimes} = \frac{1}{12} ab^3 + (a \times b) \cdot d^2$$

$$(EI)^* = E_1 \left[\frac{1}{12}\left(2 \times 1/2^3\right) + (1/2 \times 2)\left(1/2 + 10 + 1/4 - 4\right)^2 + \frac{1}{12}\left(1/2^3 \times 6\right) + (1/2 \times 6)\left(4 - 1/4\right)^2 \right]$$

$$+ E_2 \left[\frac{1}{12}\left(8 \times 10^3\right) + (8 \times 10)\left(5 + 1/2 - 4\right)^2 \right]$$

Exemplo



$$(EI)^* = E_1\left[0{,}0208 + 45{,}56 + 0{,}0625 + 42{,}18\right]$$

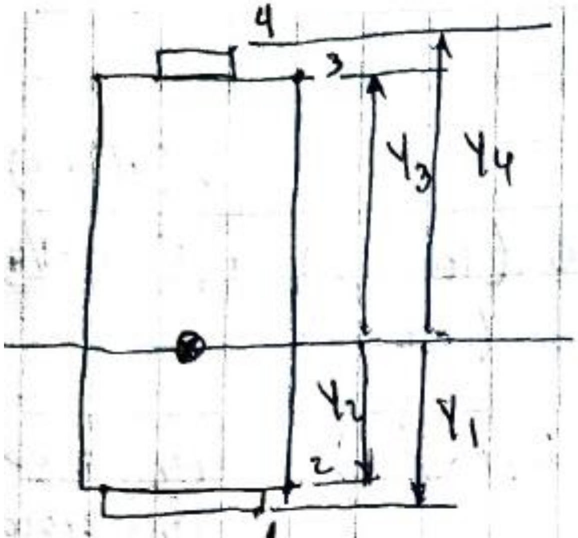
$[in^4]$

$$+ E_2\left[666{,}7 + 180\right]$$

$$(EI)^* = E_1(87{,}8) + E_2(846) \rightarrow (EI)^* = E_1\left[87{,}8 + \frac{E_2}{E_1}(846)\right]$$

$$(EI)^* = E_1 \times 121{,}7 \Leftarrow = E_1(87{,}8 + 0{,}04 \times 846)$$

Exemplo



$$\sigma_i = E_i \times \frac{M_{ADM}^{PERMISSÍVEL}}{(EI)^*} \cdot Y_i$$

QUAL É O PONTO CRÍTICO?

QUAL É O MATERIAL CRÍTICO?

$\Downarrow$

$$M_{PERMISSÍVEL} = \frac{\sigma_{ADM}^{MAD}}{Y_3} \cdot \frac{(EI)^*}{E_{MAD}}$$

MOMENTO MÁXIMO → TOLERADO NA ESTRUTURA PARA A TENSÃO PERMISSÍVEL

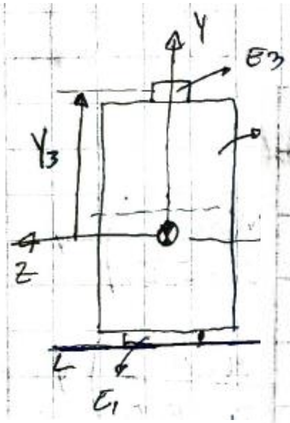
$\Downarrow$

VS.

$$M_{PERMISSÍVEL} = \frac{\sigma_{ADM}^{AÇO}\,(EI)^*}{Y_4 \cdot E_{AÇO}}$$

Se calculo usando Y_2 tolerarei um maior momento e portanto uma maior tensão.

Exemplo



$$M^{MAD}_{permissível} = \frac{\sigma^{MAD}_{ADM}}{E_{MAD}} \cdot \frac{(EI)^*}{Y_3} \quad vs. \quad M^{AÇO}_{permissível} = \frac{\sigma^{AÇO}_{ADM}}{E_{AÇO}} \cdot \frac{(EI)}{Y_4}$$

$$M^{AÇO}_{permissível} = \frac{140}{200\times10^3} \cdot \frac{(EI)^*}{(1/2+10,-4)+1/4 \cdot 6,75} \quad vs \quad M^{A} = 0,0001\,(EI)^*$$

$$M^{AÇO}_{permissível} = \overset{1,0068\times10^{-4}}{0,0001}\,(EI)^*$$ 20k-in

CONTROLA OU LIMITA O MOMENTO APLICADO

ksi = kilopound per square inch

$$10^3\ \frac{lbf}{in^2}$$

$$M^{MAD}_{permissível} = \frac{10}{8300} \times \frac{(EI)^*}{(1/2+10-4) \times 6,5}$$

$$M^{MAD}_{permissível} = \frac{1}{830 \times 6,5} \times EI$$

$$M^{MAD}_{permissível} = \overset{1,8535\times10^{-4}}{0,00019}\,(Et)^*$$

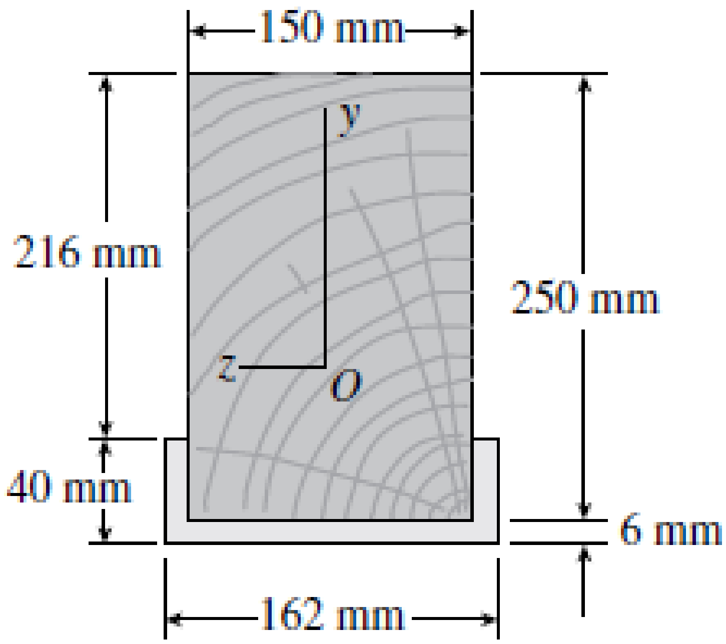
1 ksi = 6,89 MPa

1 MPa = 0,145 ksi

Exemplo

Para a viga composta de madeira e alumínio mostrada na figura, determine o momento fletor permissível. Considere

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8 \text{ MPa} \qquad \sigma_{allow}{}^{Al} = 38 \text{ MPa} \qquad \frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = 6$$



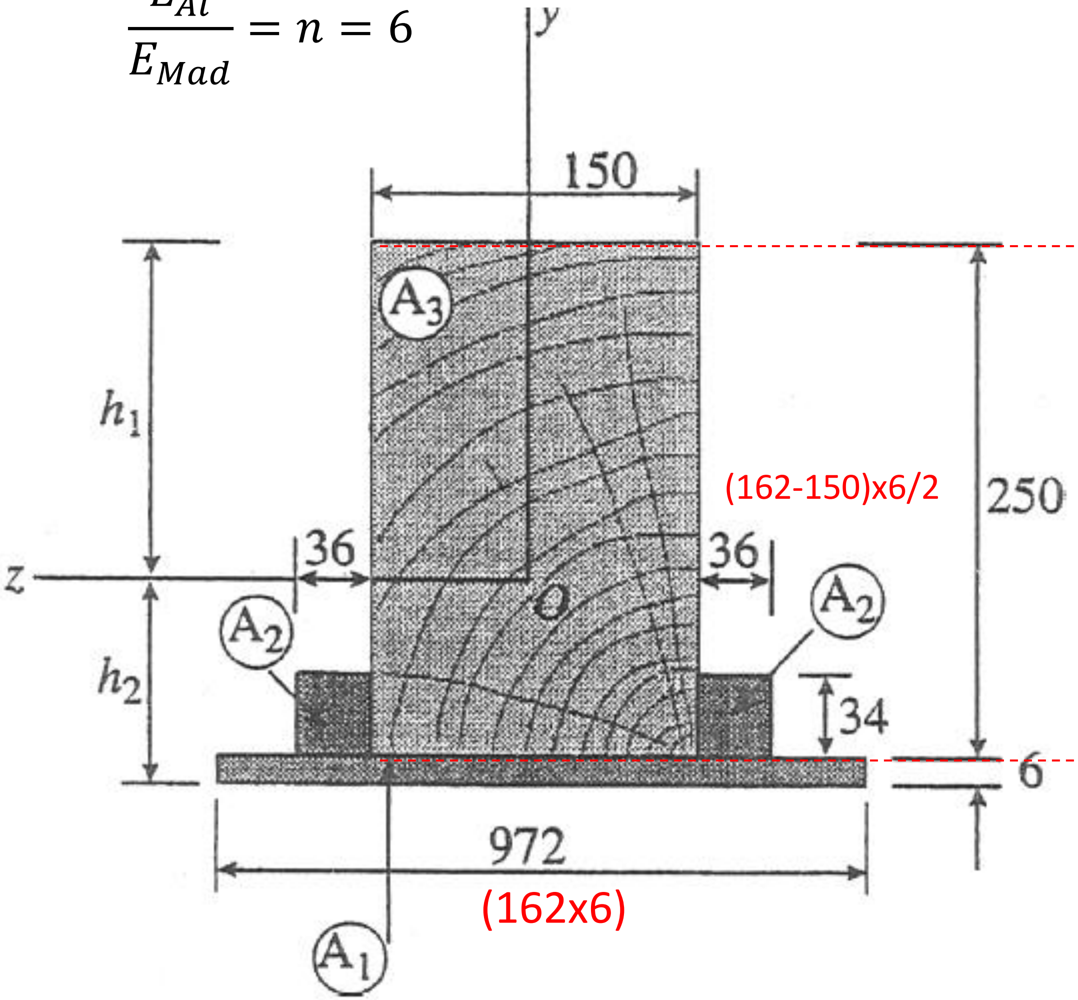
Exemplo

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8\ \text{MPa}$$

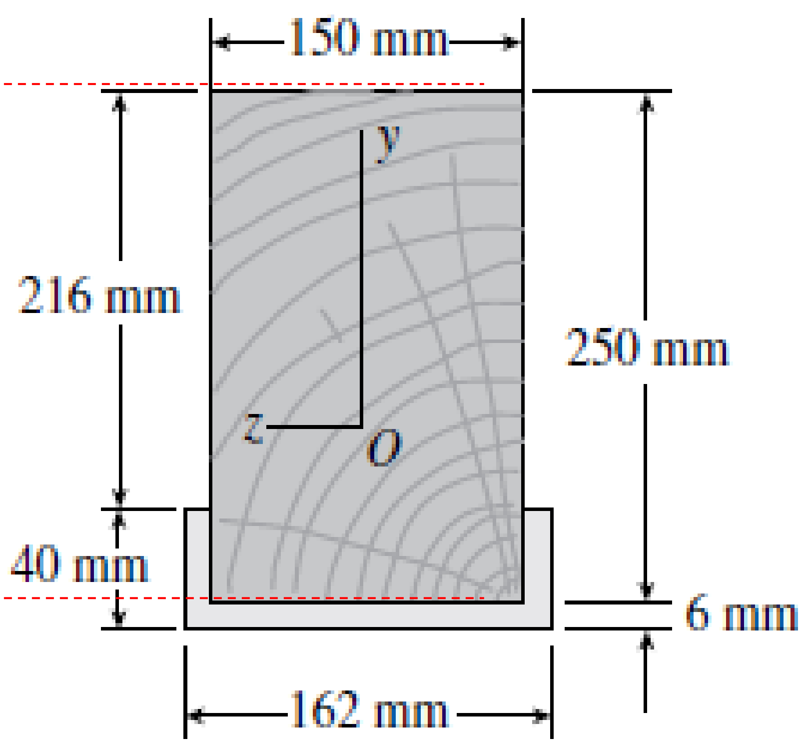
$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38\ \text{MPa}$$

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$



Seção Composta



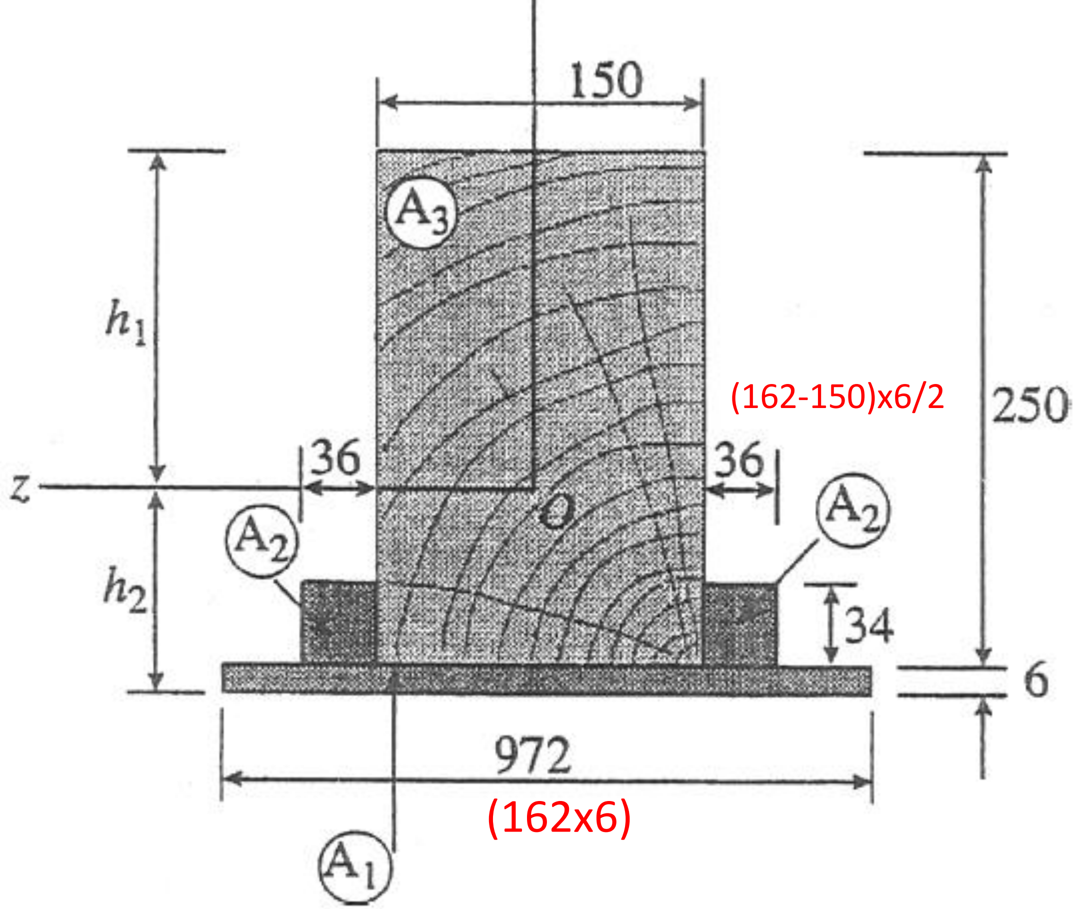
Exemplo

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38 \text{ MPa}$$

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$



Centroide da seção

$$h_2 = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i}$$

$$h_2 = \frac{y_1 A_1 + 2 y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + 2A_2 + A_3} = \frac{4{,}986{,}300 \text{ mm}^3}{45{,}780 \text{ mm}^2}$$

$$= 108.92 \text{ mm}$$

$$h_1 = 256 - h_2 = 147.08 \text{ mm}$$

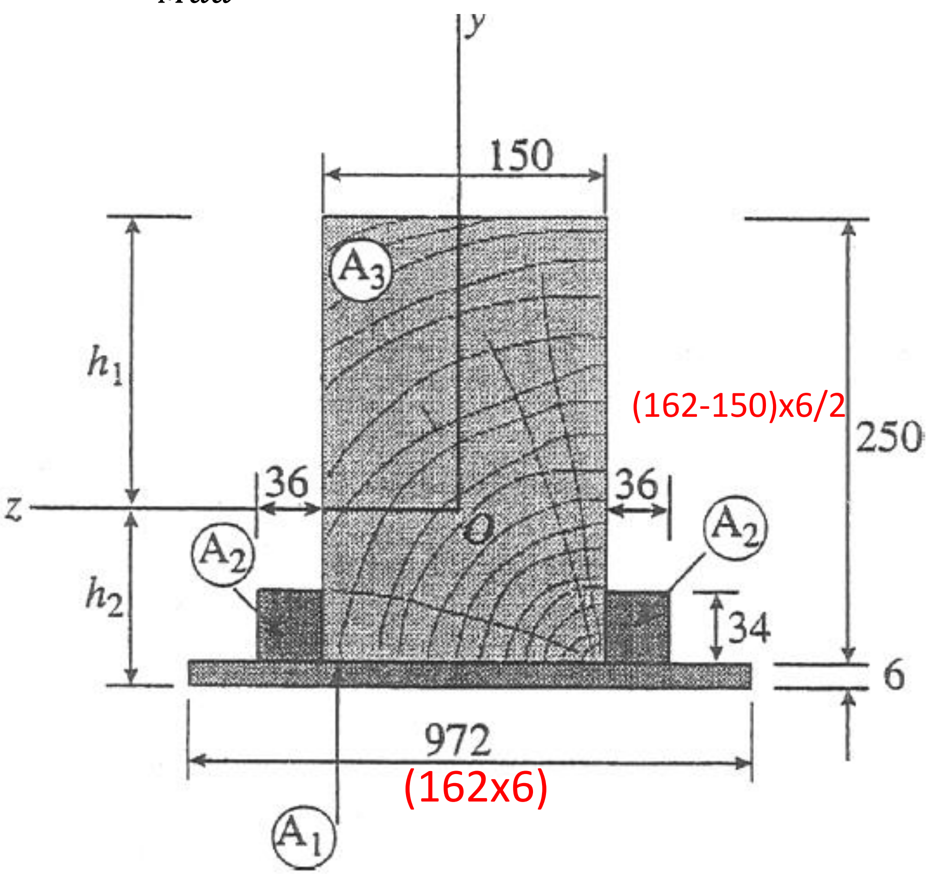
Exemplo

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38 \text{ MPa}$$



Momento de Inércia

$$\text{Area } A_1: I_1 = \frac{1}{12}(972)(6)^3 + (972)(6)(h_2 - 3)^2$$
$$= 65{,}445{,}000 \text{ mm}^4$$

$$\text{Area } A_2: I_2 = \frac{1}{12}(36)(34)^3$$
$$+ (36)(34)(h_2 - 6 - 17)^2$$
$$= 9{,}153{,}500 \text{ mm}^4$$

$$\text{Area } A_3: I_3 = \frac{1}{12}(150)(250)^3$$
$$+ (150)(250)(h_1 - 125)^2$$
$$= 213{,}597{,}000 \text{ mm}^4$$

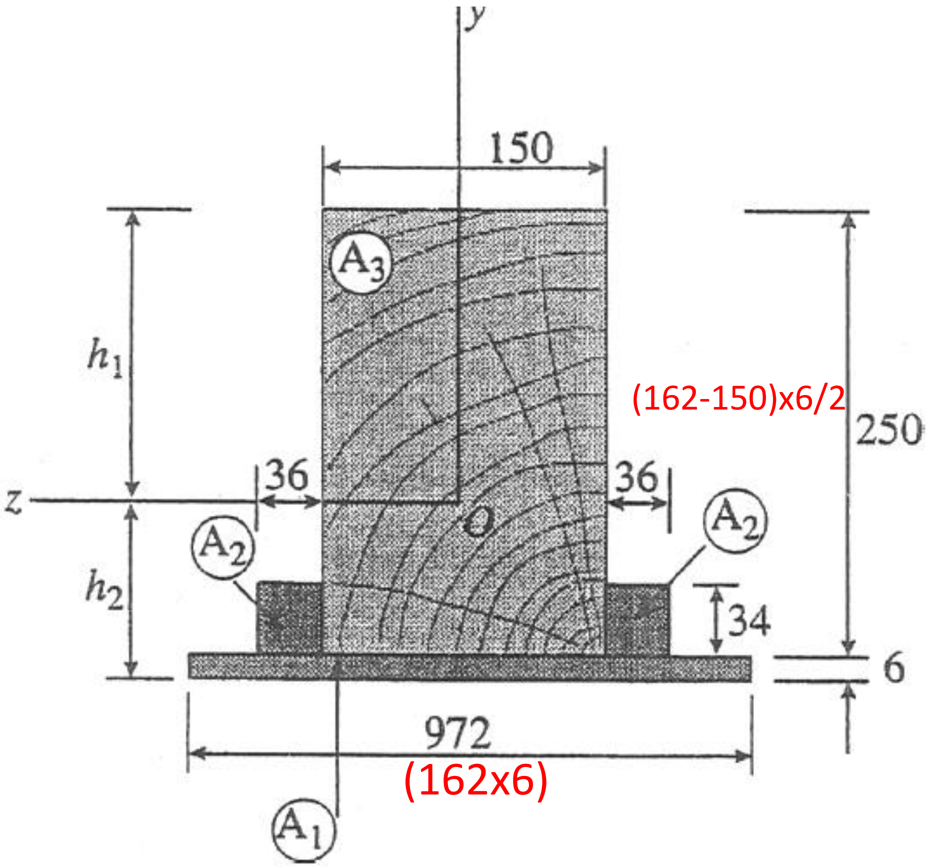
$$I_T = I_1 + 2I_2 + I_3 = 297.35 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Exemplo

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38 \text{ MPa}$$

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$



Tensão Máxima Madeira

$$\sigma_{Mad} = \frac{M_{max}}{I_T} h_1$$

$$M_{max} = \frac{I_T \sigma_{allow}{}^{Mad}}{h_1}$$

$$M_{max} = \frac{297.35 \times 10^6 \times 8}{147.08}$$

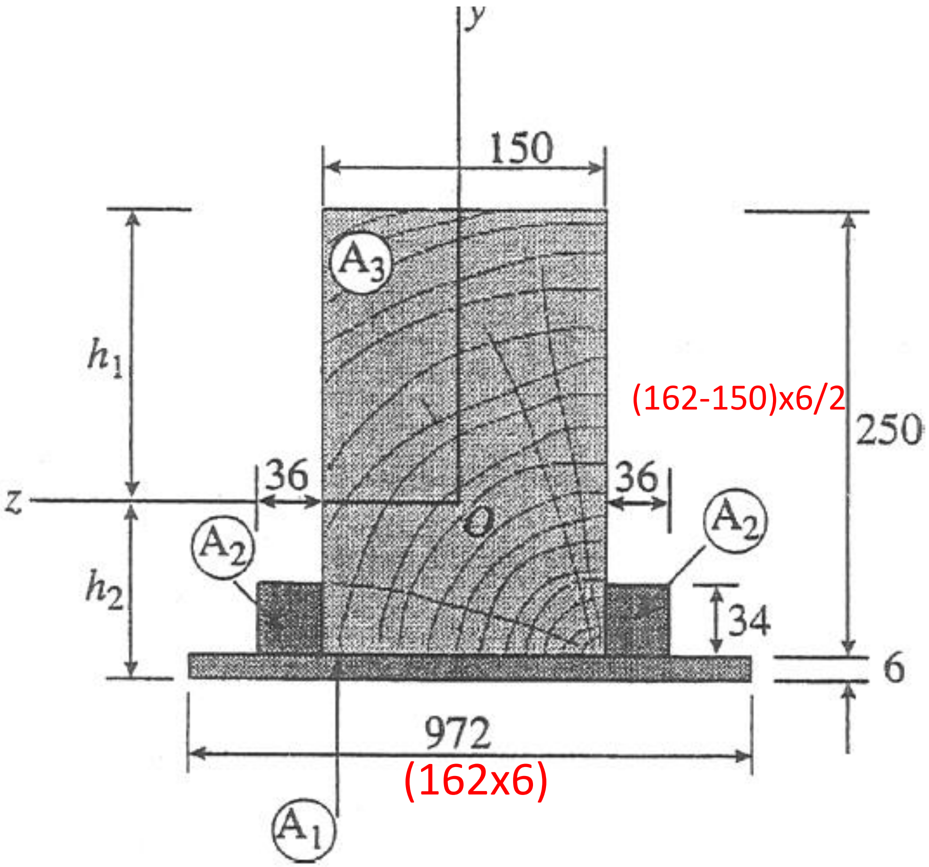
$$M_{max} = 16.2 \text{ kN} - \text{m}$$

Exemplo

$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38 \text{ MPa}$$

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$



Tensão Máxima Alumínio

$$\sigma_{Al} = n\frac{M_{max}}{I_T}h_2$$

$$M_{max} = \frac{I_T \sigma_{allow}{}^{Al}}{nh_2}$$

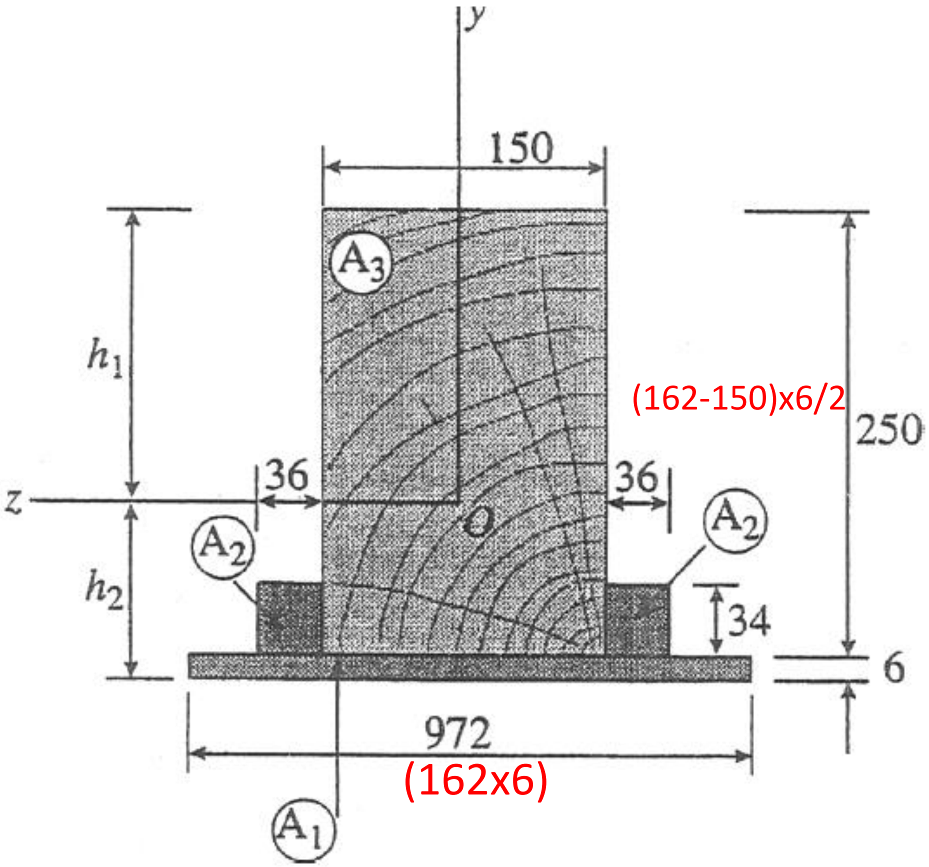
$$M_{max} = \frac{297.35 \times 10^6 \times 38}{6 \times 108.9}$$

$$M_{max} = 17.3 \text{ kN} - \text{m}$$

Exemplo

Seção Transformada de Madeira

$$\frac{E_{Al}}{E_{Mad}} = n = 6$$



$$\sigma_{allow}{}^{Mad} = 8\text{ MPa}$$

$$\sigma_{allow}{}^{Al} = 38\text{ MPa}$$

Momento Permissível

$$\boxed{M_{max}{}^{Mad} = 16.2\text{ kN} - \text{m}}$$

Vs.

$$M_{max}{}^{Al} = 17.3\text{ kN} - \text{m}$$