PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA - PIF

ANTÔNIO L. PEREIRA

1. Introdução

No aprendizado do *Princípio da Indução Finita - PIF* (ou *Princípio de Indução Matemática*), ocorre uma situação curiosa. Duas reações são frequentes:

- O PIF é muito óbvio.
- O PIF é muito complicado.

Num certo sentido, ambas as reações são procedentes.

Por um lado, ele expressa a ideia bastante intuitiva de que os números naturais podem todos ser gerados a partir de um número inicial (0 ou 1) pela aplicação repetida da operação de tomar um "sucessor". Por outro lado, o *reconecimento da necessidade* de explicitar essa ideia de uma forma precisa exige um grau de maturidade matemática relativamente alto. O mesmo ocorre com alguns postulados da Geometria Euclidiana, por exemplo, mas, no caso do PIF, aparecem algumas dificuldades adicionais, entre as quais a estrutura lógica não muito simples do enunciado.

Sendo o PIF um instrumento fundamental para a prova de resultados simples sobre os números naturais, seu aprendizado, ainda que de um ponto de vista menos profundo e mais *instrumental* é possível e desejável.

Nosso objetivo principal aqui será entender e discutir as dificuldades na compreensão e, especialmente, na utilização do PIF e propor algumas estratégias para enfrentá-las. (Algumas de nossas sugestões aparecem no artigo: Paul Ernest, *Mathematical Induction, a pedagogical discussion*, The Mathematical Gazette, 1982).

2. Um pouco de história

A origem dos números naturais se perde no tempo e se confunde com a necessidade prática de contagem de objetos, começando, inicialmente, do 2. Um desenvolvimento muito importante foi a introdução de *numerais* para representar números. Os antigos egípcios e babilônios possuíam sistemas distintos de representação que incluíam o 1 como um número. Um desenvolvimento muito posterior foi a introdução do 0, que aparece entre os babilônios na notação posicional por volta de 700 A.C. e entre os maias e olmecas na América Central, como um número separado por volta do século I A.C.

O número 0 foi usado também nos computus (calculadoras da Idade Média européia), começando com Dionysius Exiguus em 525 porém sem um numeral para representá-lo.

O uso do numeral 0 da forma moderna se originou na obra do matemático indiano Brahmagupta em 628 D.C.

Os primeiros estudos sistemáticos de números como abstrações aparecem em torno do século III A.C. e são usualmente atribuídos aos filósofos gregos Pitágoras e Arquimedes, embora estudos independentes tenham ocorrido, mais ou menos na mesma época, na India, China e América Central.

O desenvolvimento da teoria moderna dos números naturais inicia-se no século XIX, com discussões sobre a natureza exata desses números entre matemáticos e filósofos. Definições baseadas na teoria dos conjuntos são propostas por Gottlob Frege e Bertrand Russel, posteriormente modificadas para evitar certos paradoxos.

Uma outra vertente da teoria, iniciada por Charles S. Peirce. Richard Dedekind e, especialmente, Giuseppe Peano, baseia-se na *axiomatização*, isto é, na apresentação de *princípios básicos* ou *axiomas*, a partir dos quais toda a teoria deve ser desenvolvida com base em argumentos lógicos. Os famosos *Axiomas de Peano* fornecem uma estrutura simples, elegante e muito bem sucedida no desenvolvimento da teoria dos números naturais.

Os axiomas de Peano

(1) Zero é um número natural.
(2) Todo número natural tem um sucessor que é um número natural.
(3) Zero não é sucessor de nenhum número natural.
(4) Dois números naturais distintos têm sucessores distintos.
(5) Se um conjunto de nḿeros naturais contém o zero e o sucessor de qualquer número natural, então ele contém todos os números naturais.

O 5^o axioma de Peano é uma forma do *Princípio de Indução Finita* e coloca de maneira precisa a ideia de "raciocínio indutivo", que aparece anteriormente em contextos variados, matemáticos e não matemáticos.

Um dos primeiros exemplos conhecidos de uso implícito de raciocínio indutivo em Matemática encontra-se em Parmênides (um dos "diálogos" de Platão), por volta de 370 AC. O princípio intimamente relacionado da "Descida Infinita" aparece na obra de Euclides para provar, por exemplo, que todo número composto pode ser dividido por um primo.

O princípio também aparece de forma implícita na obra de matemáticos árabes e, em particular, na prova do teorema binomial escrita por al-Karali, por volta de 1000 DC.

Mais modernamente, o princípio foi usado, embora ainda não explicitamente enunciado, por Pierre de Fermat em comentários à margem de sua cópia da edição de 1621 da *Arithmetica* de Diofanto.

A primeira formulação explícita do princípio foi dada por Pascal em seu *Traité du triangle arithmétique* e usado na prova de resultados para o arranjo numérico hoje conhecido como *Triângulo de Pascal.* O princípio também foi bastante utilizado por Jakob Bernoulli e se tornou a partir daí, amplamente conhecido na comunidade matemática.

O tratamento moderno e rigoroso do princípio inicia-se no século 19, com George Boole, Augustus de Morgan, Charles Sanders Peirce e Richard Dedekind. Como já mencionamos Giuseppe Peano coloca o princípio como último axioma em seu tratamento axiomático dos números naturais.

3. Enunciados do princípio

Suporemos conhecido o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, bem como as operações usuais de soma e produto e suas propriedades básicas.

Começamos com algumas observações sobre notação. Proposições ou afirmações serão normalmente denotadas por P, Q, etc e indicaremos por $P(n)$ uma afirmação envolvendo o número natural n. Por exemplo, $P(n)$ poderia ser a afirmação; "$3^n - 1$ é um número ímpar." Em particular, $P(4)$ afirma que $3^4 - 1$ *é um número ímpar* (que é uma afirmação falsa, já que $3^4 - 1 = 80$). A afirmação: " $3^n - 1$ é um número ímpar, para todo número natural n", pode ser escrita mais sucintamente na forma "$P(n)$, para todo número natural n".

O símbolo $\wedge$ indica a junção de afirmações, ou seja, escrever $P \wedge Q$ é o mesmo que afirmar P e Q simultaneamente.

O *Princípio da Indução Finita* pode ser assim enunciado:

Princípio da Indução Finita - PIF
Para cada número natural n consideremos uma afirmação $P(n)$. Suponhamos que:

(1) $P(0)$ é verdadeira (base da indução),
(2) Para todo número natural n, $P(n)$ implica $P(n+1)$ (passo de indução).

Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Introduzindo alguns símbolos lógicos, podemos expressar o PIF de maneira bem compacta, que se4rá útil em nossa discussão.

O símbolo $\forall$ de "quantificador universal" significa "para todos". A afirmação: "P(n) vale para todo número natural n", pode ser escrita como "$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$ ".

O símbolo $\Rightarrow$ indica uma *implicação*, isto é, escrevemos $P \Rightarrow Q$, para a afirmação "se P então Q", ou seja "Q é verdadeira, sempre que P é verdadeira."

O símbolo $\wedge$ indica a junção de afirmações, ou seja, escrever $P \wedge Q$ é o mesmo que afirmar P e Q simultaneamente.

Princípio da Indução Finita - PIF (usando símbolos lógicos)

$$[P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)]$$

Outras formas equivalentes do Princípio podem ser enunciadas. Uma delas é o 5^0 axioma de Peano.

Uma outra variação é na escolha do primeiro número que aparece na base da indução : 0, 1 ou outro número inteiro n_0.

4. A analogia da princesa no castelo

Muitas analogias são frequentemente utilizadas para esclarecer o significado do PIF, entre as quais:

- A transmissão de uma mensagem ao longo de uma fileira de soldados.
- A partida de um trem, vagão por vagão.
- A queda de uma fileira de dominós.
- A subida de uma escada, degrau por degrau.
- A entrada de uma princesa em todos os quartos trancados de um palácio, dado que ela tem a chave do primeiro quarto e cada quarto contém a chave do próximo quarto.

A última analogia é talvez menos conhecida, mas é bem sugestiva. Imaginemos que os quartos estão numerados, o primeiro é o de número 1, o segundo o 2, o terceiro 3 e assim sucessivamente. Consideremos a afirmação: "A princesa pode chegar no quarto n. Como a princesa tem a chave do primeiro quarto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, o que corresponde à hipótese base (1) no princípio de indução. Agora, se ela já conseguiu entrar no quarto de número k, então ela pode usar a chave que lá está e entrará também no próximo quarto, de número $k + 1$ (hipótese (2) no princípio de indução). O que o princípio afirma é o fato bem intuitivo de que ela conseguirá então visitar qualquer quarto do castelo (na vida real, ela teria que ter tempo e paciência suficientes, mas essas considerações de ordem prática não aparecem no princípio abstrato...).

Atividade: Sugerir outras analogias e explicá-las.

5. Um exemplo

Observemos as seguintes igualdades:

- $1 = 1$,
- $1 + 3 = 4$,
- $1 + 3 + 5 = 9$,
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$,

É natural conjecturar daí que o mesmo vale para a soma dos primeiros n naturais, para qualquer n, ou seja:

- $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Ou ainda, usando a notação de somatória:
Proposição *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$.*

Prova *Vamos usar o Princípio da Indução Finita* para mostrar a validade desta afirmação. Indicaremos por S_n a somatória $S_n = \sum_{i=0}^{n}(2i+1)$. A afirmação $P(n)$ fica; $S_n = (n+1)^2$.

Passo base: $P(0)$ afirma simplesmente que $1 = 1$ que é, evidentemente, uma afirmação verdadeira.
Passo indutivo: Suponhamos que, para um número natural k, a afirmação $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, admitamos que:

$$S_k = (k + 1)^2, \ k \geq 0.$$

Vamos mostrar que, desta igualdade, podemos obter a igualdade:

$$S_{k+1} = ((k + 1) + 1)^2$$

ou seja,

$$P(k) \Rightarrow P(k + 1) \text{ para todo número natural } k.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& \sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = \overbrace{\sum_{i=0}^{k}(2i+1)}^{S_k} + 2(k+1)+1 \\ =& S_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 \\ =& (k+2)^2 = ((k+1)+1)^2. \end{aligned}$$

Tendo mostrado que ambas as hipóteses (1) e (2) do PIF são verificadas, *podemos concluir do PIF* que vale a tese, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ que é exatamente o que foi afirmado na Proposição. (uma prova como esta é denominada *prova por indução*).

Atividade Sugerir e provar outras propriedades.

6. Análise do exemplo

Como primeiro passo para entender as dificuldades que surgem na aplicação do PIF, vamos examinar os passos executados no exemplo acima. Em linhas gerais, os componentes que parecem aqui e em toda prova por indução são:

(1) O enunciado do resultado que se quer provar, que deve ser do tipo: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.
(2) A declaração de que o PIF será usado na prova.
(3) A verificação da validade de $P(0)$ ou seja, de que a afirmação é verdadeira, no caso especial em que $n = 0$.
(4) A prova de que, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ a validade da afirmação $P(n)$ implica a validade da afirmação $P(n+1)$.
(5) A conclusão de que o resultado desejado está demonstrado pelo PIF.

Vamos identificar esses passos no exemplo, destacando as eventuais dificuldades.

(1) Percebemos que o enunciado é, de fato, da forma $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ sendo $P(n)$ a afirmação: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$., Uma possível dificuldade nesse passo é a falta de familiaridade com a notação simbólica usada, especialmente o uso do quantificador universal $\forall$ e da notação para a somatória.

(2) Percebemos que o PIF pode ser usado e declaramos a intenção de fazê-lo. Esse passo, exige a familiaridade com o enunciado do PIF e a identificação das situações em que ele se aplica.

(3) Verificamos a propriedade para $n = 0$, o que, neste exemplo, requereu apenas o entendimento correto do enunciado dado no passo (1), como ocorre frequentemente. Em exemplos mais elaborados, pode ser necessária alguma manipulação numérica ou algébrica, já neste passo.

(4) Este é, em geral, o passo mais difícil. No exemplo, inicialmente trocamos o nome da variável, escrevendo

$$S_k = \sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2,$$

para a afirmação $P(k)$. Mesmo sendo esta uma mudança relativamente trivial, ela pode ajudar a evitar o erro de entender que, neste passo, estaríamos "admitindo provada a tese" (discutiremos este ponto mais detalhadamente abaixo). A implicação provada foi então

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1) = (k+1)^2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1}(2i+1) = ((k+1)+1)^2$$

para todo número natural k.

Para isto, foi necessário reescrever a somatória final de forma que a somatória inicial aparecesse e fazer algumas manipulações algébricas simples.

(5) Declaramos que, *tendo verificado as hipóteses necessárias, o resultado segue do PIF*. Neste passo foi necessário perceber que as hipóteses no enunciado do Princípio estão cumpridas.

Pergunta: *Quais são os conhecimentos e habilidades necessárias para produzir uma prova como esta?*

Uma primeira habilidade, importante especialmente nos passos (1), (2) e (5), é uma compreensão do princípio que permita ao aluno reconhecer a possibilidade (ou necessidade) de usá-lo e identificar quando as hipóteses tiverem sido completadas e que, em consequência, o resultado desejado segue do PIF. Esta pode ser uma dificuldade séria, de natureza conceitual, Vamos deixar a discussão desse ponto para mais adiante e supor que esta primeira dificuldade tenha sido, de alguma forma, superada (por exemplo, supondo que a questão foi proposta já indicando o uso do PIF) e nos concentremos nos procedimentos usados nos passos 3) e 4).

- Passo 3) (base da indução) Foi necessário verificar uma identidade numérica (neste caso muito simples).
- Passo 4) (passo de indução) Foi necessário entender o que significa provar uma implicação e fazer algumas manipulações algébricas.

Em resumo, supondo que seja reconhecida a aplicabilidade do PIF, a execução de cada um dos passos seguintes não se mostrou excessivamente complicada, supondo que o aluno já tenha domínio sobre habilidades básicas numéricas, lógicas e algébricas.

Esses, portanto, parecem ser os requisitos necessários para a parte, digamos, "mecânica" da prova. A aquisição prévia dessas habilidades constitui assim um pré-requisito importante para a construção de provas corretas, usando o Princípio da Indução mesmo, eventualmente, sem uma compreensão conceitual mais profunda do mesmo.

Entre esses requisitos, o uso de lógica básica em argumentos matemáticos simples é provavelmente, o menos familiar para os estudantes. Por esse motivo, pode ser útil uma exposição prévia a demonstrações simples envolvendo o uso de símbolos lógicos, especialmente o de implicacaçõ ($\Rightarrow$), em situações simples, que não envolvam indução. Seguem alguns exemplos, para deixar mais claro este ponto.

Exemplos

(1) Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Mostre que se 3 divide n e 3 divide m, então 3 divide $n+m$. Em símbolos: $3|n \wedge 3|m \Rightarrow 3|(n+m)$
(2) Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Mostre que se 6 divide n e 15 divide m, então 3 divide $n+m$. Em símbolos: $6|n \wedge 15|m \Rightarrow 3|(n+m)$
(3) Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Mostre que se 3 divide n e 3 não divide m, então 3 não divide $n+m$. Em símbolos: $3|n \wedge 15 \not| m \Rightarrow 3 \not| (n+m)$.
(4) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n$ é par.
(5) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 + 4n + 3$ não é primo.
(6) Sugestões ?

7. A torre de Hanói

Para o desenvolvimento de conceitos e ideias relacionadas com o PIF, é interessante a proposição de jogos, desafios e problemas concretos que despertem o interesse dos estudantes. Um "quebra-cabeças" divertido e desafiador, conhecido como 'Torre de Hanói', foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação.

Diz-se que Lucas se inspirou em uma lenda sobre um templo hindu, situado no centro do universo, no qual Brahma criou uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. A tarefa dos sacerdotes seria transferir todos os discos para uma das estacas, seguindo as regras acima. Reza a lenda que, no dia em que eles completassem a tarefa, o Universo se acabaria.

Nossa tarefa aqui é descobrir se este final está próximo....

Atividades

(1) Transferir $1, 2, 3, 4, \cdots$ discos.
(2) Explicar como isto foi feito.
(3) O procedimento pode ser generalizado para qualquer número de discos? Justificar usando um argumento do tipo indutivo.

.

8. Sequências definidas por recursão

Um conceito intimamente ligado ao PIF é o de *definição por recursão* ou *recorrência*. Em particular, uma sequência $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ de números é dada por recorrência (de primeira ordem) se

- O primeiro termo a_1 é dado explicitamente.
- O termo a_{k+1}, $k \geq 1$ é dado como uma função do termo anterior a_k.

Exemplos

- Progressões aritméticas: cada termo é igual à soma do anterior com uma constante, geralmente representada por r e denominada a "razão" da progressão.

- Progressões geométricas: cada termo é igual ao produto do anterior por uma constante, geralmente representada por q e denominada a "razão" da progressão.

Mais geralmente, podemos definir sequências dando seus primeiros k termos e cada termo seguinte em função dos k anteriores. Um exemplo é a sequência de Fibonacci, $F_0, F_1, F_2, \ldots$, dada por

- $F_0 = F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \forall n \geq 2$.

Atividades

(1) Encontrar uma fórmula explícita para o n-ésimo termo de uma P.A. e prove-a por indução.
(2) Encontrar uma fórmula explícita para o n-ésimo termo de uma P.G. e prove-a por indução.
(3) Encontrar uma fórmula explícita para a soma dos n primeiros termos de de uma P.A. e prove-a por indução.
(4) Encontrar uma fórmula explícita para a soma dos n primeiros termos de de uma P.G. e prove-a por indução.

Atividades

(1) Dar uma fórmula recursiva para o número de movimentos necessários para transferir, $1, 2, 3$ e 4. discos na Torre de Hanói.
(2) Encontrar uma fórmula explícita para o número de movimentos necessários para transferência de um número qualquer de discos. Provar a validade da fórmula obtida por indução.

9. Dificuldades e erros conceituais

A análise que fizemos dos requisitos necessários em uma prova por indução é útil especialmente se o objetivo é proporcionar os meios para a aquisição de uma competência, digamos, *instrumental*, que permita a correta construção de uma tal prova nos problemas dos tipos considerados.

Entretanto, essa análise não incluiu aspectos conceituais mais profundos nem o papel do Princípio na teoria, sua plausibilidade e relações com outros conceitos já conhecidos.

Esse objetivo mais ambicioso é, obviamente, mais difícil de atingir e depende, em boa medida, de um certo nível de maturidade matemática. Entretanto um exame mais detalhado da estrutura do Princípio e de algumas concepções incorretas frequentes podem ser auxiliares úteis. Examinamos agora algumas dessas dificuldades e sugerimos algumas estratégias para sua superação.

Estrutura lógica do PIF

Como já comentamos, o enunciado do PIF é uma sentença lógica relativamente complicada. Isto pode ficar mais claro no enunciado usando símbolos lógicos:

$$[P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) \to P(n+1))] \to [\forall n, \ P(n)]$$

que pode ser representado esquematicamente por:

$$\text{Hipótese1 } + \text{Hipótese2}\} \Rightarrow Tese$$

As afirmações conhecidas dos alunos têm, em geral, uma estrutura mais simples. Por exemplo, no nosso exemplo inicial, a igualdade:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

é do tipo $\forall n \imath \mathbb{N}\ P(n)$. Note-se que, neste caso, o símbolo de implicação
($\Rightarrow$) não aparece.

Na lista de "probleminhas", aparece a afirmação:

$$3|n \wedge 3|m \Rightarrow 3|(n+m)$$

que tem uma estrutura mais semelhante ao do PIF. Note-se, entretanto, que as duas hipóteses, neste caso, são bastante simples. No caso do PIF a segunda hipóteese é bem mais elaborada e *contém ela mesmo uma outra implicação!* Esta é um ponto que costuma criar muitas dificuldades, especialmente porque o conteúdo dessa implicação é frequentemente confundido com o resultado que se quer provar. A superação dessa dificuldade depende do entendimento claro da estrutura do enunciado, o que pode levar um certo tempo e esforço. O uso de analogias, como as que já mencionamos, pode ajudar, desde que não sejam esquecidas as diferenças entre elas e o enunciado preciso.

Outra estratégia que pode auxiliar é 'refrasear' o princípio. Uma possibilidade seria a seguinte:

- Definir um *subconjunto indutivo* de $\mathbb{N}$ como sendo aqueles que contém os sucessores de seus elementos.
- Expressar o axioma da indução como: 'O único subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ que contém o 0 ó próprio $\mathbb{N}$'.

Indução matemárica e indução "vulgar" Pode parecer estranho que uma afirmação relativamente elaborada como o PIF seja usada na demonstração de outras afirmações aparentemente mais simples. Esta pode ser uma boa oportunidade para esclarecer a ideia de *prova* em Matemática como o estabelecimento de fatos, com base em outros, aceitos como axiomas ou previamente derivado deles, por meio de argumentos lógicos. É importante ressaltar que essas "regras do jogo" não são meras filigranas acessórias, mas se mostraram necessárias, ao longo da história, para evitar dúvidas e paradoxos advindos de raciocínios imprecisos ou 'intuitivos". Em particular, podem ser dados exemplos de erros devidos ao uso da indução vulgar e analogias paara formular conjecturas numéricas. (Os exemplos que seguem foram retirados do artigo *Vale para 1, para 2, para 3, ... vale sempre?*, R. Watanabe, RPM no 09.)

Exemplos

(1) $\forall n \in \mathbb{N}\ n^2 + n + 41$ é um número primo (falso para $n = 41$).
(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ 2^n$ não começa com 9. (falso para $n = 59$)
(3) Todo número natural par maior do que 2 é soma de dois primos (não se sabe!)

A aparente circularidade
Uma dúvida frequente no uso do PIF é uma aparente circularidade, já que no passo indutivo a afirmação $P(n)$ é *suposta válida*, sendo que isto é exatamente o que se pretende provar (para todo $n \in \mathbb{N}$). A dificuldade aqui está no entendimento do papel dos quantificadores e do significado da implicação. o que se faz nesse passo não é supor a validade da afirmação para todo n mas, sim que *(para qualqer n) a eventual validade para n acarreta a validade para $n+1$.* Para superar essa dificuldade é necessário que se tenha compreendido a estrutura do PIF e o significado da implicação. A aparência de circularidade pode ser amenizada, dando um outro nome para a variável, durante o estágio de prova do passo indutivo, como fizemos no exemplo ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$), para indicar o caráter "provisório" dessa variável.

Outras dificuldades Outras dúvidas que podem ocorrer são: a necessidade de provar o passo base e a necessidade de provar o passo de indução para todos os valores de n *inclusive para $n = n_0$* . A maneira mais simples de esclarecer esses pontos é apresentar contra-exemplos ou 'pseudo-exemplos', que podem ser divertidos e curiosos.

Exemplos

(1) Seja $P(n)$ a afirmação: "$2n+1$" é um número par, para todo $n \in N$. Verifique que o segundo passo do PIF vale.
(2) Todos os cavalos têm a mesma cor.

10. Comentários finais

Para fundamentar uma teoria Matemática é essencial encontrar *princípios fundamentais* ou *axiomas* a partir dos quais os demais resultados possam ser derivados com base em argumentos lógicos. Em alguns casos, esses princípios podem ter sido usados por bastante tempo, de maneira implícita, antes que se percebesse a necessidade de explicitá-los. Um exemplo é o "Postulado de Pasch", em Geometria Euclidiana. De certa forma, isto também ocorre no caso do PIF. O objetivo de seu ensino é familiarizar os estudantes com uma técnica, para provar propriedades que aparecem naturalmente em contextos variados, supondo conhecidas propriedades básicas dos naturais e suas operações.

Do ponto de vista mais formal, isto é uma inversão da ordem, O PIF se insere mais apropriadamente em um contexto de tratamento axiomático dos números naturais, no qual inclusive as operações básicas e a noção de ordem devem ser definidas e provadas usando o princípio. Nesse contexto, o papel do Princípio se torna mais claro, bem como sua relação com outros resultados básicos. Em particular, pode-se mostrar sua equivalência (no contexto dos números naturais) com outros resultados conhecidos como o *Princípio da boa ordem*, o *Segundo princípio da indução* e o *Princípio da descida infinita*.

- **Princípio da boa ordem**: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.
- **Segundo Princípio da indução**: Para cada número natural n consideremos uma afirmação $P(n)$. Suponhamos que:
  (1) $P(0)$ é verdadeira,
  (2) Para todo número natural n, se $P(k)$ é verdadeira para todo $n_0 \leq k \leq n$ então $P(n)$ é verdadeira

  Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural número natural $n \geq n_0$.

- **Princípio da descida infinita**: Toda sequência decrescente de números naturais é eventualmente constante.

Infelizmente, não vamos discutir isto aqui. Nosso tempo, ao contrário do conjunto dos números naturais, é finito.... Para os interessados, recomendamos, entre outros excelentes textos: *Análise Real - vol I* de Elon L. Lima e *Elementos de Álgebra* de L. H. Jacy Monteiro.

Antônio L. Pereira
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo - São Paulo - Brazil
E-mail address: alpereir@ime.usp.br